НАГЛЯДНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ: ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Под редакцией профессора Е. И. Смирнова

Рекомендовано УМО по специальностям
педагогического образования
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальности
032100(050201) – математика

Ярославль, 2007

УДК 372.851(075.8)
ББК 74.262.21–245Я73
Н 164

Печатается по решению редакционно-издательского совета ЯГПУ имени К. Д. Ушинского

Рецензенты:
доктор педагогических наук, профессор В. А. Кузнецова
доктор педагогических наук, профессор А. Г. Мордкович

Коллектив авторов:
кандидат педагогических наук В. В. Богун,
кандидат физико-математических наук, доцент В. Н. Осташков,
доктор педагогических наук, профессор Е. И. Смирнов,

Н 164 Наглядное моделирование в обучении математике: теория и практика: Учебное пособие / Под ред. Е. И. Смирнова. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2007. 454 с.

ISBN

В учебном пособии предлагается инновационная концепция наглядного моделирования в обучении математике в школе и вузе, разработанная Е. И. Смирновым. Анализируется методология, философия, теория и методика обучения математике, вопросы содержания и технологии математической подготовки школьников и студентов педагогических вузов на основополагающих принципах и критериях. В качестве средств и приложений рассмотрены некоторые современные разделы математики (фрактальная геометрия, вейвлеты и др.) – В. Н. Осташков, а также исследование малых форм информатизации в обучении математике – В. В. Богун.

Учебное пособие предназначено для учителей математики средних учебных заведений, преподавателей и студентов вузов.

УДК 372.851(075.8)
ББК 74.262.21–245Я73

ISBN

Предисловие

Задолго до открытия асимметрии человеческого мозга: правое полушарие оперирует наглядными образами, левое – словесно-логическими процедурами, известный математик Д. Гильберт замечал: “В математике, как и вообще в научных исследованиях, встречаются две тенденции: тенденция к абстракции – она пытается выработать логическую точку зрения на основе различного материала и привести этот материал в систематическую связь, и другая тенденция – тенденция к наглядности, которая в противоположность к этому стремится к живому пониманию объектов и их внутренних отношений”. В то же время, традиционная классификация мышления связана с разделением его на наглядно-действенное, наглядно-образное и словесно-логическое. Данные типологии естественно отражались на принципах и методах обучения математике: принцип наглядности в обучении, метод моделирования, теоретическое обобщение и т.п. Однако реализация принципа наглядности связывается обычно с использованием различных средств: технических (в том числе компьютера), плакатов, рисунков, моделей, схем и т.д., – выполняющих функцию оперативного воздействия на органы чувств (в основном, зрения).

В этой связи исторический подход к наглядности в обучении математике как опоре на чувственное восприятие дает максимальный эффект в начальной школе и явно недостаточен при изучении высших разделов математики. Дело в том, что, с одной стороны, математический язык обладает естественным “формализмом”, каждый математический знак, символ, геометрическая фигура, диаграмма или график уже есть обобщение, “уход” от реальных объектов и ощущений, и чем выше раздел математики, тем абстрактнее математический язык. И поэтому необходим анализ и моделирование студентами абстракций, ведущих к пониманию сущности математического объекта, явления или процесса. С другой стороны, личность обучаемого должна быть обогащена рациональным и логическим мышлением (анализ, синтез, аналогия, конкретизация и т. п.) в единстве с “мгновенными актами” усмотрения сущности: инсайт, интуиция, догадка, основанных на наглядных образах и чувственной реальности, развитие которых является одной из важнейших задач математического образования. И как результат, получим наглядное оперирование математическими объектами и математическим языком с существенной опорой на рациональное и логическое мышление.

В то же время попытка описать какую-либо проблемную область в виде логической структуры аксиом, понятий, теорем, отражающих фундаментальные факты и закономерности, испытывает значительные трудности и приводит к неполноте описания. Глубина и широта поиска в логической структуре, процедура поиска оптимального пути вступают в противоречие с психофизиологическими возможностями восприятия человека (миллеровские числа, законы гештальта, психомоторика и т.п.). *Возникает проблема адекватной структуризации на основе выделения существенных связей и наглядного моделирования логического поля в соответствии с закономерностями восприятия, памяти и мышления.*

Анкетирование, проведенное среди учителей математики, показало, что большинство из них считают основной характеристикой наглядного обучения математике оперативное чувственное восприятие, причем данный показатель (по шкале Чеддока) слабо коррелирует со стажем учителей и звеном школьного образования, в котором работают преподаватели математики. Между тем в последние десятилетия трактовка принципа наглядности в обучении значительно изменилась: это формула В. Г. Болтянского “изоморфизм плюс простота”, Л. М. Фридмана “понимание плюс активность”, “внешние опоры для внутренних действий обучаемых” А. Н. Леонтьева, “выделение существенного в плане восприятия” Н. Г. Салминой и др.

Здесь необходимо отметить три важных момента. Во-первых, настоящее исследование по проблеме наглядности в обучении математике охватывает первое и необходимое звено познания – формирование представлений, возникающих на основе ощущений и восприятий. Ощущение, как правило, отражает лишь внешние признаки и стороны предметов и явлений материального мира, не всегда раскрывая их подлинную сущность.

Процесс восприятия (особенно при больших объемах информации, большой степени его формализованности) предполагает наличие узловых, опорных, характерных, специфических свойств и качеств объекта для обеспечения адекватности восприятия, будь то приемы деятельности, отражающие отдельное математическое знание или организованный набор знаний (это может быть доказательство теорем, раздел курса математики во всем многообразии логических взаимосвязей, материал отдельного урока или лекции и т.п.).

Поэтому актуальной является проблема такой организации процесса обучения математике, когда представления, возникающие в мышлении обучаемых, отражают основные, существенные, ключевые сто-

роны предметов и явлений, процессов, в том числе посредством разумного моделирования математического знания.

Именно формирование этих узловых, опорных качеств объекта восприятия (модель) и представляет собой суть процесса наглядного обучения. Такой подход a priori предполагает моделирование объекта восприятия с опорой на адекватные нейрофизиологические механизмы памяти и психологию восприятия. При этом особую значимость приобретают модели, фиксирующие процедуру математических действий.

Во-вторых, процесс моделирования, поиск устойчивых ассоциаций, проверка адекватности восприятия предполагают серьезное проникновение в современные исследования нейрофизиологических механизмов восприятия, изучение этапов обработки стимула: сенсорного анализа, сличения с репертуаром памяти, принятия решения, использование наработанных законов психологии восприятия, серьезного изучения личности обучаемых. *Поэтому не менее актуальной является проблема: дать психолого-педагогическое и психофизиологическое обоснование концепции наглядного обучения математике, расширить путем диагностических методик влияние психологических компонентов эффективности восприятия на результаты обучения.*

В-третьих, актуальность настоящего исследования определяется отсутствием единообразия трактовки принципа наглядности в обучении, слабым отражением специфики математической деятельности, оторванностью от практики, что не позволяет в полной мере использовать достижения психолого-педагогической науки. Деятельность учителя в процессе преподавания ввиду абстрактного характера, сложности и высокого уровня построения математического материала предполагает более детальную конкретизацию применяемых принципов обучения в направлении их системного использования. *Таким образом, в настоящий период необходимо дать единую трактовку наглядного обучения математике, разработать приемы деятельности учителя в процессе наглядного обучения, исследовать специфику наглядности в обучении математике в школах и вузах, используя положительный опыт передовых учителей и ученых.*

В то же время необходимо сконцентрировать обучение на базисных ключевых положениях современной математики и ее приложений, которые должны изучаться основательно посредством наглядного моделирования и представлять единую математику с достаточной глубиной и целостностью. *При этом необходимо обеспечить максимальный развивающий и творческий эффект для личности обучаемого средствами* *математики и сформировать устойчивый потенциал математической деятельности.*

Поэтому в учебном пособии рассматриваются элементы фрактальной геометрии, теории вейвлетов и теории инфрааддитивных и счетно-полуаддитивных функционалов на топологической группе как реализация логических принципов наглядного моделирования в математике.

Более того, в современный период активно разрабатываются педагогические технологии обучения, ориентированные на получение гарантированных результатов обучения при оптимальных условиях совместной деятельности учителя и ученика в достижении поставленных целей учебной деятельности. Поэтому соединение технологичности и наглядности в обучении математике может привести к повышению качества профессиональной подготовки будущих учителей математики

В настоящем исследовании предлагается дидактическая система математического образования будущих учителей математики, основополагающую роль в которой играет технология фундирования и наглядного моделирования в обучении математике (в том числе, в средней школе), позволяющая достичь вероятностно гарантированных результатов обучения разных качественных уровней усвоения учебного материала и целостности представления основных математических структур. Существенная роль в проектировании педагогической технологии отведена алгоритму управления познавательной и творческой деятельностью студентов в процессе моделирования знаково-символической деятельности и средств представления математических знаний.

Авторы приносят благодарность своим ученикам и коллегам Г. Е. Козлову, Т. Н. Карповой, И. Н. Муриной, Е. Ю. Жоховой, Д. С. Карпову, В. В. Жолудевой, Г. Ю. Бураковой, Е. Н. Трофимец, Н. В. Скоробогатовой за качественно проведенную экспериментальную проверку отдельных положений концепции наглядного моделирования в обучении математике с целью выявления эффективности функционирования дидактической системы математического образования будущих учителей математики, инженеров и учеников профильных классов средней школы.

Особая благодарность Т. Л. Трошиной за огромный труд по компьютерному набору рукописи книги.

Авторы надеются, что настоящее исследование будет полезно не только преподавателям высших учебных заведений, но также учителям математики средней школы, которые найдут в нем элементы творческого проектирования учебного процесса и образцы методики обучения математике.

Введение

Изменения в структуре высшего педагогического образования России, появление средних школ разных направлений: лицеев, гимназий, колледжей и т.п., демократизация общественной жизни имеют в своей основе коренной поворот к гуманистическим позициям функционирования современного образования. Способность и готовность учителя XXI века дать личности возможность получения образования необходимого уровня и глубины на любом отрезке ее жизнедеятельности становится теперь одной из основных тенденций развития образования. Поэтому современный этап развития среднего образования выдвигает повышенные требования к профессиональной (особенно предметной) подготовке учителя, вооруженного новейшими методиками и технологиями обучения, творчески мыслящего созидателя учебного процесса.

В немалой степени эта тенденция коснулась содержания математического образования в среднем и высшем звене, равно как и теорий, концепций и методов обучения математике. Индивидуализация обучения, дифференцированный подход, использование новейших исследований в психологии, физиологии человека, педагогике для совершенствования процесса обучения, поиск оптимальных условий для усвоения сложного математического содержания требуют от учителя не только высокой компетентности в предметной области, но и достаточной подготовленности к самообразованию, к проявлению творческой активности на основе профессиональной идентификации личности учителя и профессии.

Одной из ведущих задач педагогического процесса подготовки учителя математики средней (полной) школы является преобразование личности студента в учителя-профессионала, способного решать все многообразие задач, связанных с обучением и воспитанием школьников, поэтому улучшение профессиональной подготовки учителя математики требует не только новых, более эффективных путей организации учебно-воспитательного процесса в педвузе, но и пересмотра структуры и содержания математической подготовки студентов, поднятия ее на технологический уровень.

В современных условиях интенсивного применения математических методов в естествознании, технике и смежных науках, которые непременно находят свое отражение в изменяющихся программах школьного и вузовского математического образования, настоятельно стоит проблема более пристального использования и развития в обучении математике психофизиологических механизмов восприятия информации личностями обучаемых, развития их математических способностей, мышления и культуры.

Поэтому рассмотрение педагогического процесса математического образования будущих учителей математики, его задачи, планирование, технологии исходят из потребности в поисках нового, оптимального в методах, средствах и формах обучения, способствующих формированию целостной системы научных знаний.

Актуальность рассмотрения этих вопросов подтверждается ведущим положением математики как среди фундаментальных, так и среди прикладных наук (что находит свое яркое проявление в их интенсивной математизации); с другой стороны, – объективной сложностью усвоения математического содержания, обусловленной прежде всего многоступенчатым характером математических абстракций.

Для студентов и школьников при изучении математики, особенно на начальных этапах усвоения учебного материала, структура изучаемых математических объектов и их существенные связи не всегда выступают за знаками, выраженными в буквенно-цифровой и графической форме. Даже при наличии развитого фиксированного алфавита, правил обращения с ним, перевода и оперирования процесс обучения математике объективно может привести к формализму в овладении знаниями. Преодоление формализма в усвоении содержания математических объектов представляет серьезную и далеко не решенную проблему.

Более того, целостность, являясь свойством восприятия, стимулирует усвоение нового математического знания обучаемыми. Однако в дидактическом процессе целостность восприятия математических объектов и знаково-символическая деятельность ограничиваются временными интервалами и психофизиологическими возможностями восприятия субъектами деятельности. Поэтому актуальным является раскрытие функциональных, операционных и мотивационных компонентов целостности восприятия обучаемыми знаково-символической деятельности в направлении оптимизации обучения математике, доступности и устойчивости восприятия сложных математических объектов.

Таким образом, подготовку учителя математики необходимо выделить в отдельную проблему не только в практическом и теоретическом, но и в методологическом планах, обращая особое внимание на возможность максимальной эффективности обучения для усвоения знаний и умственного развития студентов.

Приведение учебных планов по математическим специальностям в соответствие с Государственным образовательным стандартом испытывает значительные трудности реализации, ввиду широты направления “Физико-математическое образование”, а учебные планы и программы, равно как и их структура для подготовки специалиста-предметника, мало отличаются от ранее действующих. В последних фундаментальная подготовка всегда предшествовала методической и профессионально-направленной. Обширные курсы алгебры, математического анализа, геометрии, абстрактные по своему содержанию, и в основном определяемые логикой развития математического знания, представляют значительные трудности для большинства студентов педвузов специальности “математика”. В то же время качество и устойчивость овладения профессионально-направленным учебным материалом (школьная программа) и раскрытие его связей с вузовской математикой остались второстепенным направлением подготовки как по отведенному учебному времени, так и по глубине осмысления.

Наши ученые и методисты озабочены падением уровня математического образования в педвузах России, и дело не только в реальном уменьшении учебных часов на математику или объективно сложившейся экономической и демографической ситуации, когда педвузы обучают основную массу (условно)средних по способностям студентов, а в качестве и действенности усвоения математического содержания будущими учителями математики.

Еще 1988 году С. П. Новиков выступил на бюро отделения математики АН СССР с докладом “О состоянии математического образования в педвузах СССР”. Были поставлены задачи коренной перестройки математического образования будущих учителей, введения в программы математических факультетов педвузов объемного курса элементарной математики (на I курсе – до 50% учебного времени, отводимого на математическое образование). Реальная озабоченность квалификацией значительного числа учителей математики прослеживается в работах Л. Д. Кудрявцева, Н. Х. Розова, В. Л. Матросова, Г. Л. Луканкина, М. И. Шабунина, А. Г. Мордковича (1987–2007 гг., в рамках республиканской программы “Профессионально-педагогическая направленность математической подготовки будущего учителя”), Г. В. Дорофеева и др. Более того, анализ обученности трудоустроившихся выпускников показывает, что из них только 30% овладели знаниями и умениями на высоком уровне (учились на “4” и “5”). Однако предпринятые меры не привели к реальным качественным сдвигам в подготовке учителей математики.

В ходе анализа результативности существующей системы математической и методической подготовки учителя математики в педагогическом вузе, который проводился в течение 10 лет на базе Ярославского педуниверситета им. К. Д. Ушинского, ряда других педагогических вузов России (Владимирского, Вологодского, Пермского педуниверситетов, Костромского госуниверситета, а также Бирского пединститута), а также на примере анализа результатов профессиональной подготовленности учителей математики г. Ярославля и срезового уровня знаний, умений и навыков школьников старших классов было установлено, что результаты профессиональной подготовки будущих учителей математики в педагогическом вузе не в полной мере удовлетворяют современным запросам системы народного образования как заказчика, так и запросам исполнителя – преподавателей педагогических вузов.

В условиях снижения доли профессионально-предметной подготовки учителя математики в педвузе в последние десятилетия при сохранении фундаментального блока математических дисциплин (который представляет собой “урезанный вариант” университетского образования) реально понизилось качество предметной подготовки учителя математики средней (полной) школы. Как показали диагностические исследования профессиональной подготовленности учителей математики 9–11 классов г. Ярославля, около 65% респондентов испытывали затруднения в воспроизведении математических знаний и умений уровня средней (полной) школы по следующим темам: элементарные функции, последовательность, производная, интеграл, системы координат, показательные и логарифмические уравнения и т.д. Только 10% респондентов владеют активным арсеналом методов и приемов обучения в свете современных тенденций методики обучения математике. Низка творческая активность самообразования учителя математики, его психолого-педагогическая и математическая культура.

Диагностическое исследование показало (на основе анкетирования учителей математики средней школы), что владение учителями арсеналом современных методов обучения математике недостаточно развито. Учителя оказываются неспособными в основной массе к реализации инновационных методик, особенно в связи с осуществлением уровневой и профильной дифференциации учащихся; недостаточно прочно владеют математическим содержанием; осторожны в вопросах внедрения новых технологий обучения математике. Так, моделирование, информационные технологии, приемы развивающего обучения слабо отражены в реальной педагогической деятельности, представление о наглядном обучении математике как опоре только на чувственное восприятие доминирует во взглядах учителей старших классов. Ученики старших классов и абитуриенты недостаточно осознанно, гибко и прочно владеют математическим содержанием, не обладают в достаточной мере целостным представлением о математических понятиях, методах и приложениях. Об этом свидетельствует многолетний опыт работы ученых-методистов, отраженный в публикациях журнала “Математика в школе” (М. И. Башмаков, В. Г. Болтянский, Н. Я. Виленкин, Г. Д. Глейзер, Г. В. Дорофеев, А. Г. Мордкович, Н. Х. Розов и др.) и различных сборниках, посвященных методике обучения математике в педвузе, результатам вступительных экзаменов, оценке качества знаний будущих учителей на государственных экзаменах по математике.

Существенные недостатки выявляются в математической подготовке студентов. Главные из них: формализм знаний, недостаточность сформированности целостности математических объектов, слабая развитость логико-модельного мышления, недостаточная прочность знаний, умений, навыков и методов школьной математики, слабая взаимосвязь школьной и вузовской математики. Студенты плохо представляют механизмы и особенности усвоения математического содержания как профессиональной основы для построения обучения математике в школе.

Факторы, порождающие формализм знаний в процессе обучения математике и, как следствие, недостаточную подготовленность к профессиональной деятельности, можно подразделить на объективные и субъективные. **Объективные факторы** (не зависящие от воли и умений преподавателей и студентов) – это трудности и сложности оперирования знаково-символическими средствами, высокий уровень абстрагирования при работе с математическими объектами; недостаточная разработанность психолого-педагогических теорий (технологий) обучения математике, психофизиологических процессов восприятия, памяти, мышления; слабая эффективность профориентационной работы по привлечению в педвузы одаренных и интеллектуально развитых абитуриентов; **субъективные факторы** (зависящие от воли и умений преподавателей и студентов) – это чрезмерная интенсивность и недостаточная структурированность информационного потока знаний; неразвитость функциональных и операционных механизмов восприятия и переработки математической информации обучаемым; слабая мотивация и прикладная направленность воспринимаемых знаний – недостатки методического обеспечения учебной деятельности; недостаточное внимание педагогов к вопросу организации рефлексии обучаемых и формирования творческой активности в процессе обучения математике.

Кроме того, математический аппарат предназначен, в частности, для описания целостных систем, функционирующих в реальном мире;

он позволяет исследовать их структуру и динамику, статику и интегральные характеристики. Глубокие взаимосвязи, выражающиеся в математической модели целого, описываются функциональным анализом и теорией автоматов, алгеброй и теорией случайных процессов, статистическими и вероятностными методами. В то же время математические понятия, теоремы, алгоритмы, доказательства и т.п., будучи математическими объектами педагогического процесса обучения математике, должны приобретать свойства и характеристики целостности как основы сохранения и переноса информации новому поколению. Исследования целостности на разных уровнях: глобальных структур (дидактический процесс, учебные планы, учебные программы, дидактические модули и т.д.), локальной модельности (модели и схемы функционирования математических понятий, кодирование знаково-символической деятельности, заместители педагогических процессов и т.п.), организации познавательной деятельности обучаемых и ее результативности – являются одной из важнейших проблем дидактики математики в средней и высшей школах, проектирования и построения образовательного процесса.

Поэтому можно предположить, что хорошо организованная профессиональная ориентация, необходимость учета потребности подготовки учителей математики для разнопрофильных школ требуют существенного повышения качества профессиональной подготовки учителей математики в педвузах.

Интерес и озабоченность проблемой подготовки учителей математики в педвузах сохранялась у наших ведущих ученых и методистов до последнего времени (А. И. Маркушевич, А. Н. Колмогоров, В. Д. Шадриков, С. П. Новиков и др.): “Состояние математического образования в школах и вузах страны, степень его требовательности, способность большое количество людей довести до необходимого уровня – это один из важнейших факторов, определяющих, будут ли в стране кадры, действительно умеющие работать” [143].

Результаты экспериментальной и аналитической работы, характеризующие уровень предметной и методической подготовки учителя математики, теоретический анализ разнообразных литературных источников (монографий, диссертаций, статей, учебников, отчетов, документов министерств и ведомств) позволили выделить ряд противоречий:

– между содержанием учебно-методического обеспечения математического образования в форме учебно-методических комплексов (УМК) (если таковые имеются, а фактически разрозненных компонентов УМК

– методических указаний, пособий, учебников, программного обеспечения, рабочих программ и т.п.) и объективной необходимостью наличия **целостной дидактической системы** обучения математике;

– между развитостью теоретических положений психологии и педагогики, практической значимостью математического содержания (основные математические понятия, теоремы, методы, доказательства, действия) и унифицированной, узко направленной методикой обучения математике в педвузе;

– между абстрактностью и сложностью исследуемых математических объектов и уровнем использования современных методов, форм и средств обучения математике;

– между ориентацией на построение содержания математического образования, исходя из его особенностей, и необходимостью учета психологических особенностей сенсорно-перцептивных процессов адекватного восприятия математического содержания студентами;

– между естественным “формализмом” математического языка (и как следствие – формализмом знаний) и сущностью математических объектов (понятий, теорем, доказательств и т.п.), проявление которой является важной методической проблемой.

Выделение указанных противоречий послужило главной причиной проведения исследования путем развития дидактической системы математического образования будущего учителя математики в педагогическом вузе на основе наглядного моделирования.

Добиться реального улучшения дела подготовки учителя математики можно усилением методологической составляющей математического образования, внедрением новейших теорий, концепций и методов обучения математике, переструктуризацией содержания математической подготовки в направлении усиления школьного компонента.

Методологическую основу исследования составили философские, физиологические, психолого-педагогические и методико-математические исследования, связанные с проблемой диссертации: метод системного подхода (В. П. Кузьмин, В. Г. Афанасьев, И. В. Блауберг, В. Н. Садовский, Б. Г. Юдин, А. В. Карпов и др.), физиологические теории восприятия и сущности трудовой деятельности (П. К. Анохин, И. М. Сеченов, В. И. Виноградов, Н. А. Бернштейн и др.), психология восприятия, развитие высших психических функций, деятельностный подход (Л. С. Выготский, С. Л. Рубинштейн, Н. А.Менчинская, А. Н. Леонтьев, Б. Г. Ананьев, Б. Ф. Ломов, В. Д. Глезер, Б. М. Теплов и др.), психология способностей человека (В. Н. Дружинин, П. П. Блонский, К. К. Платонов, Н. С. Лейтес, Е. П. Ильин, Б. М. Теплов, В. Д. Шадриков и др.), психологические теории обучения (Н. А. Менчинская, П. Я. Гальперин, Н. Ф. Талызина, В. В. Давыдов, Л. В. Занков, Д. Б. Эльконин и др.), построение системы высшего педагогического образования (Б. С. Гершунский, В. П. Беспалько, В. В. Краевский, Н. В. Кузьмина, Н. Ф. Родионова, А. П. Тряпицына, Г. Л. Луканкин, В. Л. Матросов, В. В. Афанасьев, Е. И. Смирнов, В. Д. Шадриков, В. А. Кузнецова и др.).

Математическое образование будущих учителей математики серьезно анализировалось в трудах И. К. Андронова, Н. М. Матвеева, Н. В. Метельского, Н. Я. Виленкина, Г. В. Дорофеева, Г. Д. Глейзера, В. М. Монахова, А. Г. Мордковича, Н. Х. Розова, В. А. Гусева, Г. Л. Луканкина, Ю. М. Колягина, Г. И. Саранцева, Г. Г. Хамова, Н. Л. Стефановой, В. В. Афанасьева, В. А. Тестова и др.

Большое влияние на идейные установки авторов оказали работы известных российских математиков А. Д. Александрова, В. И. Арнольда, Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогорова, Л. Д. Кудрявцева, С. П. Новикова, А. Н. Тихонова, В. М. Тихомирова и др., относящиеся к вопросам совершенствования системы подготовки специалистов и содержания математического образования.

Особенностью рассмотрения дидактической системы математического образования в настоящем исследовании явилось усиление методологического компонента в свете более пристального рассмотрения концепции наглядного моделирования в обучении математике и технологизации проблемы целостности восприятия, представления и воспроизведения математических объектов и процессов школьниками и студентами педвузов в процессе обучения математике.

Концепция исследования представляет собой научные основы решения проблемы создания дидактической системы математического образования будущего учителя математики, определяющей научноуправляемый педагогический процесс математического образования,

– имеющий целью достижение высокого уровня математической готовности выпускников педвузов к выполнению функций обучения, воспитания и развития обучаемых средствами математики,

– связанный с реализацией общедидактических принципов: научности, доступности, гуманизации, дифференциации и т.д.,

– организуемый с учетом современного состояния школьного образования: Государственного образовательного стандарта средней (полной) школы, разнообразия форм средних учебных заведений, вариативности учебных программ и учебников, разработки новых педагогических технологий,

– определяемый рядом структурообразующих факторов: углубления математической подготовки на основе базового школьного компонента, реализации технологии наглядного моделирования в обучении математике, профессионально-педагогической направленностью математического образования.

В главе I “Математическое образование будущего учителя математики в педагогической теории и практике” проанализированы исторические и психолого-педагогические аспекты подготовки учителей математики в России и за рубежом с XVIII века до наших дней, педагогический процесс обучения математике в педагогических вузах и его закономерности, сформулирована и обоснована концепция наглядного моделирования в обучении математике как структурообразующий фактор целостного педагогического процесса подготовки учителя математики.

До XVIII века о формах математического образования в России судить трудно: массовых школ не было, а в высших учебных заведениях математика практически не преподавалась. Приходские и монастырские школы были предназначены для детей священников и светской знати и не носили массового характера, распространено было семейное воспитание, индивидуальное самообучение. Содержание образования ограничивалось элементами практической геометрии и началами арифметики (позиционная система счисления, дроби, извлечение корней, измерение расстояний, площадей и объемов, коммерческая арифметика).

Таким образом, **первый период** подготовки учителей математики до XVIII века является организационно-стихийным и характеризуется отсутствием массовых школ, слабой поддержкой правителей страны, недостаточной информацией о формах, средствах и методах обучения математике в России.

Второй период начинается с открытия в 1701 году Петром I Московской школы математических и навигацких наук, а в дальнейшем инженерной, артиллерийской школ, горных училищ, где математика стала одним из основных предметов изучения. Он характеризуется началом формирования структуры педагогических учебных заведений, элементами целенаправленной политики правительства по подготовке учителей математики.

Однако в XVIII веке целенаправленной математической подготовки будущих учителей гимназий и школ не было, методика обучения математике не выделялась в отдельное направление, подготовка кадров осуществлялась в основном при университетах и в учительских семинариях.

Третий период педагогизации математического образования начинается с 1802 года, когда было создано Министерство народного просвещения и осуществлено расширение сети учебных заведений и упорядочение их работы. Одной из основных задач университетов стала подготовка учителей. Тесный контакт со школой усиливал интерес ряда профессоров университетов к педагогическим вопросам. В целях улучшения педагогической подготовки студентов как будущих учителей школ в начале 50-х годов XIX века в Московском университете была организована кафедра педагогики. Впервые для студентов была введена педагогическая практика.

В целом подготовка учителей математики осуществлялась педагогическими институтами (отделениями) при университетах, педагогическими курсами и классами женских гимназий. Кадры для уездных и городских, а затем и высших начальных училищ готовили учительские институты. Всего в царской России XIX века было 25 высших учебных заведений, выпускники которых работали в школах.

Четвертый период развития математического образования характеризуется самодостаточностью высшего педагогического образования (по отношению к классическому университетскому образованию) для решения социальных задач подготовки учителей математики в России и начинается с 1917 года.

В этот период формируется и развивается методика обучения математике в начальной и средней школе, система непрерывного педагогического образования, предлагаются пути совершенствования содержания математического образования будущих учителей математики, разрабатываются теории и технологии высшего педагогического образования.

Пятый период преобразований в системе подготовки учителей средней школы начался в 2003 году с подписания Россией Болонских соглашений. С этого времени Министерство образования и науки РФ активно разрабатывает концепцию и этапы перехода на многоуровневую систему образования (бакалавр-магистр), адаптированную к содержанию учительской профессии.

Особенностью рассмотрения дидактической системы математического образования в настоящем исследовании явилось усиление методологической компоненты в свете концепции наглядного моделирования в обучении математике и технологизации проблемы целостности восприятия и представления математических объектов и процессов студентами педвузов в процессе обучения математике.

Введение в педагогический процесс наглядного моделирования математических объектов и знаково-символической деятельности является не только целью, но и средством для постижения сути (сущности) явлений и процессов (понятий, теорем, доказательств, алгоритмов и т.п.), а значит, весомым компонентом технологизации процесса обучения математике.

В качестве объективных и субъективных факторов педагогического процесса выступают потребности и интересы общества, методическое обеспечение обучения, уровень подготовленности преподавателей, педагогическая ситуация и макроситуация (экономическая, политическая), в рамках которых осуществляется формирование педагога-профессионала и его последующая деятельность.

Завершается процесс обучения формированием профессионально-педагогической готовности индивида к выполнению самостоятельной деятельности. Уровень готовности определяется на основе сформированности предметных знаний и умений, педагогических знаний и умений, личностных качеств и творческого потенциала, а также на основе профессиональной идентичности личности и профессии.

Нормативный объем и содержание профессионально-педагогических целей и задач определяется требованиями к уровню готовности личности к обучению в педвузе и последующей деятельности в качестве учителя на данном этапе развития общества. Готовность зависит от уровня сформированности предметных знаний, умений и навыков в области математики, развития специальных способностей и качеств личности (интеллектуальный уровень, характер, темперамент, функциональные механизмы психики), от уровня сформированности общеучебных знаний и умений (адаптивные возможности, коммуникативные качества), а также отношения студента к обучению в педвузе и будущей профессиональной деятельности (направленность личности, мотивы, интересы).

Гармонизация интересов общества и личных интересов и мотивов деятельности студентов педвузов определяет следующие цели и задачи организации целостного педагогического процесса подготовки учителя математики:

– обеспечить подготовку учителя математики на высоком предметном, педагогическом, гуманитарном и методическом уровне с широким спектром реализации профессиональных возможностей для работы в разнопрофильных школах;

– формировать в ходе педагогического процесса социально адаптированную профессии личность учителя математики:

а) мотивацию обучения; включенность в систему: школа – педколледж – вуз – школа;

б) общеучебные знания, умения, навыки;

в) адаптивные возможности;

– формировать творческую активность личности учителя математики;

– обеспечить развитие профессиональных качеств личности будущего учителя математики:

а) математического мышления;

б) педагогического мастерства;

в) волевых и интеллектуальных качеств;

г) коммуникативных качеств;

д) функциональных механизмов психики (восприятия, мышления, речи, памяти, психомоторики, самоанализа);

е) характера, темперамента, способностей.

Личностно-ориентированный подход в организации педагогического процесса определяет и направляет модель математического образования будущего педагога.

Педагогическая система математического образования является важнейшей частью системы более высокого уровня – профессиональной подготовки учителей математики – и функционирует в ее составе.

Структурообразующим фактором выступает проектирование наглядного моделирования учебной деятельности. Анализируя проблему восприятия математических объектов и знаково-символическую деятельность (П. А. Анохин, Б. Г. Ананьев, А. Н. Леонтьев, Б. М. Теплов, В. Д. Шадриков, В. А. Ганзен, Н. Г. Салмина и др.), выделяем различные подходы и концепции наглядного обучения математике (Я. Коменский, И. Г. Песталоцци, К. Д. Ушинский, П. Я. Гальперин, Л. В. Занков, В. В. Давыдов, Л. М. Фридман, В. Г. Болтянский, Э. Г. Мингазов и др.).

Эти задачи ориентируют рассмотрение наглядности в целостном процессе обучения математике в тесной связи со знаково-символической деятельностью в направлении оптимального учета психологических и нейрофизиологических закономерностей восприятия, мышления и памяти.

Определение. ***Наглядное моделирование в обучении математике*** *– это процесс формирования адекватного категории диагностично поставленной цели устойчивого результата внутренних действий обучаемого на основе моделирования существенных свойств, от-*

ношений, связей и взаимодействий при непосредственном восприятии приемов знаково-символической деятельности с отдельным математическим знанием или упорядоченным набором знаний.

Выделяется и анализируется компонентный состав концепции наглядно-модельного обучения математике как дидактического процесса формирования новых математических знаний:

– целеполагание (методологический, теоретический, практический, прикладной, эвристический, деятельностный модуль);

– модель целостного математического объекта;

– знаково-символические средства (ЗСС) (материальные и материализованные, перцептивные и идеальные);

– знаково-символическая деятельность (ЗСД) (моделирование, схематизация, кодирование и замещение) и управление познавательной деятельностью;

– устойчивость перцептивного образа и представлений;

– адекватность априорной модели (кода, схемы, заместителя) результату внутренних действий обучаемого (перцептивному образу).

Представление знаний рассматривается в виде логических, семантических, реляционных, продукционных, фреймовых и гипертекстовых моделей.

Во второй главе "Дидактическая система математического образования и ее компоненты" проектируется необходимость формирования определенных качеств личности будущего учителя математики, достижение которых обусловлено психологическими, педагогическими, мотивационными, технологическими условиями и содержанием для обучающей деятельности (средства, организационные формы, математическое содержание) в рамках целостного дидактического процесса.

Дидактическая система математического образования представляет собой **целостный объект**, имеющий следующие характеристики:

– компоненты системы,

– структура внутренних и внешних взаимосвязей,

– функциональность,

– интегративность,

– обобщенность.

Анализ теоретических работ и реальная практика педагогической деятельности позволяют представить следующие основные **компоненты дидактической системы**:

– мотивы,

– цели и задачи,

– модель содержания и структуры математического образования,

– средства, формы, условия,

– результаты,

– мониторинг функционирования системы.

Структурообразующим фактором для построения дидактической системы математического образования будущего учителя математики явилась **концепция наглядного моделирования в обучении математике.** Определяя, систематизируя и обосновывая структурные компоненты дидактической системы, мы прослеживали значимость и системное качество нашей концепции в проектировании будущего учебно-воспитательного процесса. В основу построения дидактической системы легла теория функциональных систем П. А. Анохина.

В основе целеполагания **теоретического модуля** лежит задача подготовки будущего учителя математики с заданными характеристиками высокого уровня теоретической (фундаментальной) обученности, достаточной для творческого владения школьным математическим материалом.

Проектирование **прикладного модуля** целостной дидактической системы математического образования будущего учителя математики определяется следующими задачами:

– обеспечение мотивации развертывания спиралей фундирования базовых учебных элементов блоком прикладных задач;

– конкретизация теоретических знаний – как практическое умение;

– фундирование практического умения по спирали: умение – навык;

– научный ретроспективный взгляд на школьную математику;

– решение прикладных задач естествознания и смежных наук;

– конкретизация как наглядно-модельная иллюстрация теоретических знаний;

– конкретизация как методическая функция теоретического знания;

– конкретизация как исследовательская функция нового теоретического знания;

– конкретизация теоретических знаний (понятий, теорем, алгоритмов и т.п.) достаточным количеством частных проявлений как фактор усвоения.

Эффективная организация учебно-методической деятельности студентов в рамках дидактической системы требует реализации важных для математической деятельности дидактических принципов: фундирования, целостности, профессионально-педагогической направленности, наглядно-модельного обучения, оптимальности, развивающего обучения.

Реализация рассмотренных принципов в дидактической системе математического образования должна осуществляться в следующих компонентах содержания образования:

– учебный план предметного блока Государственного образовательного стандарта;

– учебные программы (образовательные профессиональные программы) математических дисциплин;

– теоретический и практический материал учебных дисциплин, отражающий содержание учебных программ;

– методологическое и методическое обеспечение преподавания математики на основе критериев отбора содержания математического образования.

Рассмотрим набор критериев отбора содержания математического образования в свете сформулированных концептуальных принципов, обеспечивающих оптимальное сочетание требований к основам профессиональной подготовки будущего учителя математики. При разработке соответствующих критериев были использованы исследования В. А. Оганесяна по методу обобщенных критериев: критерий дидактической значимости, критерий методологической значимости, критерий полноты и др.

Мы выделяем следующие критерии:

– единства учебного материала и содержательных линий;

– базовых знаний, умений, навыков, математических методов, алгоритмов и процедур;

– логической спирали;

– обобщенности;

– полноты;

– оптимальности;

– бинарности (теоретической и методической линий).

Дается содержательный анализ каждого из предлагаемых выше принципов и критериев на основе преемственности и фундирования базовых знаний, умений, навыков и математических методов в школе и педвузе средствами наглядно-модельного обучения.

Структурно все учебные дисциплины объединены в следующие уровни: профессиональный, фундирования, технологический. Технологический уровень подразделяется на общекультурный (ориентация на гуманитарные профильные классы) и творческий (ориентация на математические школы и классы) в соответствии с уровнями В. Г. Болтянского и Г. Д. Глейзера. Теоретической основой для отбора математического содержания для специальных курсов и семинаров является определение спиралей фундирования школьного знания, рассматриваемых соответственно на уровнях: методического расширения, мотивационно-прикладного блока спиралей фундирования, включенности различных теоретических обобщений в единую целостность.

Одним из важнейших условий успешного функционирования дидактической системы математического образования будущего учителя математики является наличие механизма осуществления внутреннего и внешнего мониторинга (отслеживания) ее функционирования.

В § 3 разработана методика осуществления внутреннего и внешнего мониторинга функционирования дидактической системы математического образования.

В главе III “Методические основы математического образования будущего учителя математики” разработаны технология наглядно-модельного обучения математике, ее сущность, компоненты, принципы, педагогический идеал проектируемого учебного процесса, рабочее технологическое поле и технологически допустимые нормы отклонения от идеала.

Вероятностно гарантированные результаты обучения – это прежде всего варьирование признака на репрезентативной совокупности, где оценочные значения должны удовлетворять требованиям нормального распределения генеральной совокупности.

Получение вероятностно гарантированных результатов обучения как по глубине понимания учебного материала, так и по количественным показателям непосредственно связано с повышением уровня технологичности обучения математике. Здесь связаны воедино три важных компонента: индивидуальные особенности восприятия, понимания, запоминания, прочности мнемических процессов обучаемого; технологические средства, параметры, характеристики организации управления познавательной деятельностью обучаемых; объем, интенсивность, внутренняя структура и организация знаково-символических средств. Концепция наглядного моделирования в обучении и ее компоненты опирались на основные характеристики этих трех важнейших направлений определения содержания математического образования будущих учителей математики, более того, именно наглядное моделирование в обучении математике может быть средством для достижения сущности новых знаний, формирования будущей профессиональной ориентировочной основы учебной деятельности (ООУД).

С 60-х годов нашего века в дидактических исследованиях стал появляться термин “технология обучения”. Эта педагогическая категория возникла в связи с исследованием вопросов проектирования учебной деятельности и различные подходы к определению технологии обучения и ее содержанию давались в трудах В. П. Беспалько, В. М. Монахова, М. А. Чошанова, В. В. Серикова, В. М. Шепеля и других.

Нам импонирует определение, данное В. М. Монаховым: “Педагогическая технология – это продуманная во всех деталях **модель** совместной педагогической деятельности по проектированию, организации и усвоению учебного процесса с безусловным обеспечением комфортных условий для учащихся и учителя. При этом обязательно задаются технологические нормы допустимых отклонений от идеальной модели, в границах которой достижение планируемых результатов гарантировано”.

Согласно В. П. Беспалько педагогическая технология характеризуется в отношении целеполагания **принципом диагностической целенаправленности**; он означает необходимость такой постановки целей обучения, которая допускала бы объективный контроль степени достижения цели, настолько точно и определенно, чтобы можно было сделать заключение о степени ее реализации и построить вполне определенный дидактический процесс, гарантирующий ее достижение за заданное время.

При решении технологических задач реализации дидактической системы математического образования будущего учителя математики и, как следствие, получения планируемых результатов обучения для большинства студентов, одним из ведущих факторов, определяющих оптимальность дидактической системы, выступает исходное состояние личности обучаемого.

Важным аспектом диагностического целеполагания измерителей качества усвоения дидактических модулей (теоретического, прикладного, методического) является диверсификация уровней усвоения учебного материала, причем мы будем различать усвоение понятий, теорем, алгоритмов и т.п., и освоение практических умений, связанных с данным понятием, теоремой, алгоритмом.

Основной задачей педагогической технологии является диагностическое определение целей обучения и разработка материалов для объективного контроля за качеством знаний обучаемых на всех этапах обучения.

В определенной мере таким технологическим средством модели глобальной структуры для математического содержания может служить

методика микродипломов для итогового государственного экзамена выпускников, реализуемая в рамках концепции наглядного моделирования в обучении.

Таким образом, компоненты технологии наглядного моделирования в обучении математике прослеживаются по трем уровням: глобальной структуры, локальной модельности, организации познавательной деятельности (в том числе представлены информационные технологии по всем уровням).

Интегральное использование технологических элементов позволяет получить вероятностно гарантированные результаты обучения в условиях познавательной и творческой активности студентов и оптимальных затрат учебного времени. Применение компьютерных технологий обеспечивает замкнутый и направленный учебный процесс.

Наглядность математического объекта (или перцептивного образа) определяется, как уже отмечалось, факторами восприятия, представления, мнемическими процессами в их единстве на основе диагностируемого целеполагания. Следующие **критерии** определяют существо наглядности математического объекта:

– диагностируемое целеполагание целостности математического объекта;

– понимание обучаемым сущности математического объекта (адекватность восприятия);

– устойчивость перцептивного образа и представления;

– познавательная и творческая активность обучаемого на основе комфортности и успешности обучения.

Первый и третий критерий обуславливаются проектированием ООУД со знаково-символическими средствами дидактического процесса, второй и четвертый – знаково-символической деятельностью как обучаемого, так и обучающего (как внешнего, так и внутреннего плана).

Данная типология критериев наглядности в обучении математике позволяет определить типологию видов наглядности.

Управление познавательной деятельностью студентов в технологии наглядного моделирования в обучении непосредственно связано с творческой инновационной деятельностью студентов: когнитивная визуализация знаний (сбор данных, перенос знаний, выдвижение и проверка гипотез, рефлексия, моделирование, процессуальная ориентация и др., связанные с визуализацией знаний); антиципационная деятельность (формализация функциональной глобальной сути математических объектов, наглядность преемственности, наглядно-графические ассоциации, наглядное моделирование будущей профессиональной деятельности и др.); цепочки задач учебного и научно-исследовательского характера формирования приемов научного мышления (анализ, синтез, моделирование, фоновая наглядность и др.).

Практическая реализация технологических процессов наглядного моделирования в обучении осуществлена на примере раздела математического анализа “Дифференциальное и интегральное исчисление”, организацией квазиисследовательской и творческой деятельности студентов.

В главе IV “Организация опытно-экспериментальной работы” исследуются критерии эффективности и результативности функционирования дидактической системы математического образования будущих учителей математики и ее компонентов на основе статистического анализа и результатов опытно-экспериментальной работы за период с 1987 по 2007 годы. Критерии эффективности определяются качеством усвоения базовых знаний, умений, навыков и методов (профессиональных и фундаментальных), уровнем сформированности математического мышления и культуры, уровнем сформированности творческой активности студентов, уровнем профессиональной идентификации личности будущей профессии.

Проведенный констатирующий эксперимент в педвузе и средней школе преследовал следующие задачи: определить уровень представлений учителей математики старших классов о наглядном обучении, оценить уровень предметных знаний студентов, развитие их интеллектуальной (тест Амтхауэра) и мотивационной сферы (терминальные ценности), оценку черт личности (тест Кеттелла) и показателей, характеризующих уровень профессиональной идентичности личности (профессиональная самооценка, удовлетворенность взаимоотношениями, уровень тревожности, удовлетворенность профессией и т.д.), определить социальный состав абитуриентов, качество профориентационной работы, влияние качества обучения и других факторов на количественные показатели доезда до мест будущей работы. Полученные результаты свидетельствовали о некоторых недостатках в функционировании действующей дидактической системы математического образования и ставили вопрос о ее развитии и совершенствовании.

Формирующий эксперимент был направлен на уточнения и проверку выдвинутой гипотезы исследования и был проведен в следующих направлениях:

– определение результативности уровневой дифференциации по психологическому принципу в контексте реализации авторской дидактической системы математического образования;

– определение эффективности формирования творческой активности студентов в процессе наглядного моделирования в обучении математике;

– определение эффективности применения отдельных технологических модулей концепции наглядного моделирования в обучении математике (информационные технологии, сквозные темы).

В педагогическом эксперименте были использованы следующие методы: анкетирование, контрольные срезы знаний, анализ результатов государственных и курсовых экзаменов. Все данные сводились в статистические таблицы, сравнивались, анализировались, подвергались статистической обработке, при этом определялись такие показатели, как “изменение коэффициента усвоения объема математических понятий”, “средний балл уровня знаний по учебной дисциплине”, “коэффициент стремления к достижению результатов учебной деятельности”, “относительная частота проявлений инициативной потребности моделирования” и др.

Исследование показало положительную динамику и достоверность результатов по всем обозначенным направлениям.

Глава 1

Математическое образование будущего учителя математики в педагогической теории и практике

1.1. Математическая подготовка студентов педвузов в России и за рубежом

Педагогическое образование является одним из важнейших компонентов культуры развития общества. Проблема адекватности передачи опыта предшествующих поколений волновала человечество на протяжении тысячелетий. Краеугольным камнем педагогического образования всегда являлось математическое образование, определяющее не только передачу сведений по различным областям математики, но и формирование научного мировоззрения, развитие качеств мышления обучаемого.

До XVII века о формах математического образования судить трудно: массовых школ не было, а в высших учебных заведениях математика практически не преподавалась. Так, Феофан Прокопович, выдающийся церковный и общественный деятель, преподавал в Киевско-Могилянской академии и впервые ввел в программы академии лекции по геометрии и физике. Т. С. Полякова [162] отмечает: “математика и математическое образование перестают быть безымянными: вслед за именем ученого-математика XII века Кирика Новгородца и новгородского школьника XIII века Онфима появляется вполне реальная фигура преподавателя математики первого высшего учебного заведения России Феофана Прокоповича”. Приходские и монастырские школы были предназначены для детей священников и светской знати и не носили массового характера, распространено было семейное образование, индивидуальное самообучение. Содержание образования ограничивалось элементами практической геометрии и началами арифметики (позиционная система счисления, дроби, извлечение корней, измерение расстояний и объемов, коммерческая арифметика).

Таким образом, первый период подготовки учителей математики (до XVII века) организационно является стихийным и характеризуется отсутствием массовых школ, слабой поддержкой правителей страны, недостаточной информацией о формах, средствах и методах обучения математике в России.

Второй период начинается с открытия в 1701 году Петром I Московской школы математических и навигацких наук, а в дальнейшем инженерной, артиллерийской школ, горных училищ, где математика стала одним из основных предметов изучения. В 1714 году специальным указом в губернских городах были учреждены "цифирные" школы при архирейских домах и крупных монастырях с целью обязательного изучения элементарной математики; их общая численность к 1722 году составляла 42 школы и немногим более 2000 учеников. Цифирные школы просуществовали до 1744 года и, несмотря на их невысокую эффективность, способствовали распространению математического просвещения в России. Учителей математики цифирные школы получали из специальных профессиональных школ. Обучение носило догматический характер: требовалось только запоминать правила и уметь применять их к соответствующим задачам, что будущие учителя математики и прививали в дальнейшем своим воспитанникам.

Так, по данным документальных источников, в 1716 году по велению Петра I из Московской школы математических и навигацких наук и Петербургской морской академии в местные цифирные школы было направлено 47 учителей. Это было первое организованное трудоустройство молодых специалистов-педагогов. Велика роль Академии наук России (в середине XVIII века она имела свои учебные заведения) и особенно Московского университета в подготовке педагогических кадров. "...Петр I с полной определенностью высказал мысль, что Академия не может ограничиться в России теми исключительно научными задачами, которым служат соответствующие учреждения на Западе; она должна быть не только сосредоточием научного творчества, но и рассадником знания в стране; а именно, академики должны явиться также профессорами университета, а воспитанники последнего должны распространять просвещение дальше и, по-видимому, прежде всего в качестве учителей гимназий..." [76].

И все же на университет нельзя было смотреть как на первую педагогическую академию, возникшую в эпоху, когда в Европе еще не было и речи о чисто педагогических учреждениях. Московский университет является фактически первым высшим педагогическим учебным заведением страны (в 1779 году при нем была создана учительская семинария). Прежде всего огромное значение имело создание при университете первой в России большой общеобразовательной светской средней школы – университетской гимназии. Эта гимназия насчитывала сначала сотни, а затем тысячи учащихся. Успешный опыт ее работы позволил университету уже в 1758 году расширить поле своей деятельности и открыть гимназию в Казани. Напомним, что в это время даже в Петербурге не было гимназии.

Казанская гимназия рассматривалась университетом как составная часть самого университета: он отпускал на ее содержание средства, обеспечивал ее преподавателями и учебными пособиями и руководил ее работой. Одновременно с этим Московскому университету был поручен контроль за работой всех частных пансионов Москвы и центральных губерний и проведение экзаменов для иностранцев, претендовавших на получение диплома домашнего преподавателя. В последней четверти XVIII века университет принимал активное участие в подготовительной работе по созданию и открытию гимназий в ряде губернских городов (так, профессор В. А. Аршеневский руководил работой по открытию гимназии в Ярославле).

Московский университет играл в развитии просвещения в стране исключительно важную роль и как один из главных в стране центров по подготовке кадров преподавателей для школ. Далеко не случайно развертыванию сети средних школ в стране предшествовало несколько десятилетий работы университета, в течение которых он подготовил минимально необходимое число учителей для средней школы. Воспитанники университета составляли значительную часть среди преподавателей гимназий в XVIII – начале XIX века.

Так как гимназия ставила своей целью не только подготовку будущих студентов, но и предоставление возможности изучать отдельные, наиболее необходимые им предметы, то обязательного для всех учебного плана не было. Обязательное изучение предметов и последовательность их прохождения существовали только для тех, кто намеревался продолжать свое образование в университете. Большую часть учителей гимназии составляли выпускники университета и его студенты: к середине 60-х годов университет полностью обеспечил гимназию учителями. В гимназии начинали преподавательскую работу многие профессора: Д. С. Аничков, Сибирский, Чеботарев и др. В 1778–1779 годах при университете была организована первая в России учительская семинария, которая готовила учителей – преподавателей гимназий и частных пансионов.

В соответствии с планом М. В. Ломоносова Московский университет в XVIII веке состоял из трех факультетов. Все студенты должны были начинать с философского факультета и обучаться на нем 3 года. Поскольку на факультете изучались математика, физика, философия, экономические, исторические и так называемые словесные науки, на нем имелось 4 кафедры: философии, физики, истории и кафедра оратории и поэзии. После окончания философского факультета студенты либо оставались на этом же факультете, либо переходили на один из факультетов – юридический или медицинский.

Важной особенностью организации учебного процесса в университете явилось начавшееся здесь применение таких методов обучения, как наблюдения, опыт, эксперимент, наглядность обучения, что способствовало более прочному усвоению учебного материала и содействовало образованию у студентов навыков самостоятельной исследовательской работы.

Передовые для того времени педагогические принципы и методические приемы нашли яркое отражение в “Способе учения” – одной из первых русских книг по методике преподавания, составленной профессорами университета. В этой книге рассматривались вопросы последовательности изучения материала, методических приемов, целей изучения предметов, преподававшихся в университетской гимназии.

Математика, и в еще большей степени механика, оставались в университете до конца XVIII века лишь вспомогательными предметами. Задачи подготовки специалистов в области механики и математики университет перед собой в тот период еще не ставил, что сказалось как на характере преподавания, так и на качестве учебников по математике, создававшихся в университете. Так, Д. С. Аничков, учебники которого по всем разделам математики неоднократно издавались и переиздавались вплоть до конца века, старался наполнить их материалом, необходимым в первую очередь практикам и естествоиспытателям. Развитие производительных сил, успехи в области техники все более отчетливо ставили задачу введения в университетское преподавание элементов высшей математики – аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчисления. Этому способствовали и крупные успехи в области математики и механики, которых добилась к этому времени Академия наук, где развертывается деятельность таких крупнейших ученых, как Л. Эйлер и Д. Бернулли.

Начало преподавания в университете высшей математики связано с деятельностью ученика профессора Д. С. Аничкова профессора В. А. Аршеневского (1758–1808), который, возглавив кафедру “чистой математики”, в 1804 году впервые в университете начал преподавание дифференциального и интегрального исчисления. Это было подготовлено выпуском в 1797 году учебника А. Д. Барсова “Новая алгебра”, включавшего соответствующие разделы из работ Эйлера и Кестнера.

Таким образом, в XVIII веке целенаправленной математической подготовки будущих учителей гимназий и школ не велось, методика обучения математике не выделялась в отдельное направление, подготовка кадров осуществлялась в основном при университетах и в учительских семинариях (например, Петербурга, сделавшей первый выпуск педагогов в 1786 году). По проекту академика Ф. Эпинуса в 1783 году в Петербурге было открыто Главное народное училище и при нем учительская семинария. Разделение их на два самостоятельных учебных заведения последовало только в июле 1786 года. Из физико-математических наук в программу главных училищ входили: арифметика, геометрия, физика и механика. Никаких специальных педагогических предметов не преподавалось.

В культурном отношении Россия в начале XIX века продолжала значительно отставать от передового Запада. Количество школ и других учебных заведений оставалось ничтожным. Правительство вынуждено было принимать определенные меры в области просвещения, так как без этого не могли быть обеспечены растущие потребности развивающейся промышленности, нормальная работа государственного аппарата. В этих целях в 1802 году было создано Министерство народного просвещения, а в 1803 году были опубликованы “Предварительные правила народного просвещения”, имевшие своей целью некоторое расширение сети учебных заведений и упорядочение их работы. Это было начало **третьего периода** педагогизации математического образования.

Вся страна была разделена на 6 учебных округов. В соответствии с этим, кроме уже имевшихся Московского, Виленского и Дерптского университетов предполагалось открыть еще три – Петербургский, Казанский и Харьковский. В начале XIX века роль Московского университета еще более возросла, так как на него возлагалось руководство всеми учебными заведениями Московского учебного округа, включавшего 10 губерний. Изменение места и назначения университета в системе образования требовало реорганизации университета и приспособления его структуры для решения новых задач.

Одной из основных задач университета стала подготовка учителей. В циркуляре Министерства народного просвещения от 8 июля 1810 года говорится: “...чтобы предписано было директорам и смотрителям училищ иметь неослабный надзор за учителем, дабы в облегчение себя не затрудняли детей одним только вытерживанием наизусть уроков, но приводили бы их легким, простым образом **к пониманию** всего им преподаваемого, останавливаясь на каждом слове, сколько-нибудь для них непонятном, и объясняя оныя удобовразумительным для их лет способом...”

Профессора университета с большим вниманием следили за деятельностью учебных заведений округа. Учебные планы гимназий в то время были обширными, энциклопедическими: изучались, например, три языка – латинский, немецкий, французский, география и статистика – общая и Российского государства, начальный курс философских наук (метафизика, логика, нравоучение), **математика** (**алгебра, геометрия, тригонометрия**), физика, естествознание (минералогия, ботаника, зоология), теория коммерции, технология, рисование. Тесный контакт со школой усиливал интерес ряда профессоров университета к педагогическим вопросам. Но спрос на учителей рос, а университетские институты не давали достаточного контингента их при быстро разраставшейся школьной сети. В 1828 году был утвержден новый устав гимназий, которые предполагалось открывать не только в губернских, но и в уездных городах. В результате в 1828 году был учрежден Главный педагогический институт, задача которого – готовить учителей и профессоров, хотя теперь только для училищ народного просвещения. Принимались в институт преимущественно воспитанники духовных семинарий, которые должны были обучаться 6 лет. Эти 6 лет распадались на 3 курса: предварительный курс – 2 года, окончательный курс – 3 года и курс педагогики – 1 год.

В целях улучшения педагогической подготовки студентов как будущих учителей школы в начале 50-х годов XIX века в университете была организована кафедра педагогики, впервые для студентов введена педагогическая практика. Она носила своеобразный характер: учеников гимназии приводили в университет, и здесь учителя в присутствии студентов давали уроки; затем происходил разбор этих уроков.

Обучение по уставу продолжалось в университете 3 года, однако за этот срок мало кто из студентов оканчивал университет, фактически большинство училось 4 года. Университет имел 4 отделения: нравственных и политических наук, физических и математических наук, медицинских наук и отделение словесных наук. На физико-математическом отделении велось преподавание теоретической и опытной физики, чистой математики, прикладной математики, астрономии, химии, ботаники, минералогии и сельского домоводства, технологии, а также читались курсы, относящиеся к торговле и фабрикам. По окончании университета казенно-коштные студенты физико-математического отделения были обязаны прослужить не менее 6 лет по Министерству просвещения, как правило, учителем в училищах и гимназиях. Интернат при университете послужил, по-видимому, прототипом позднее организованных чисто педагогических учреждений. В 1804 году на базе Петербургской семинарии был создан педагогический институт. При каждом из названных 6 университетов учреждались педагогические институты, в которые принимались студенты, уже пробывшие в университете 3 года. Продолжительность обучения в педагогическом институте была также 3 года. Согласно уставу, окончившие институт определялись учителями, старшими или младшими, смотря по достоинствам.

Усилившееся реакционное влияние привело к тому, что, начиная с 30-х годов XIX века, связь университета со школой стала ослабевать, а затем и вовсе прекратилась. Университет продолжал готовить учителей средней школы, но они совершенно не были связаны со школьной жизнью, не знали школы. Позднее задачи педагогических институтов были сведены исключительно к научно-теоретическому образованию, что привело к падению интереса молодых людей к поступлению в институт и, как следствие, к понижению уровня преподавания.

В 1858 году Главный педагогический институт в Петербурге был закрыт, как и остальные институты при университетах. Ввиду этого Главное управление училищ предложило учредить во всех университетских городах двухгодичные педагогические курсы, на которые принимались бы лица, уже окончившие университет. В ведомстве Министерства народного просвещения состояли 3 лицея: Ришельевский (Одесса), Демидовский (Ярославль) и Князя Безбородко (Нежин). Преподавание в них было распределено по классам. Ришельевский лицей имел 2 отделения: юридико-политическое и философское, в каждом из них находилось по 2–3 класса. Например, в Демидовском лицее преподавались аналитическая геометрия, высшая алгебра и высшее исчисление по Коши.

Таким образом, в XIX веке подготовка учителей осуществлялась педагогическими институтами (отделениями) при университетах, сельскими семинариями и школами, педагогическими курсами и классами женских гимназий, возникшими после отмены крепостного права в 1861 году. Кадры для уездных и городских, а затем и высших начальных училищ готовили учительские институты. Всего в царской России XIX века было 25 высших учебных заведений, выпускники которых работали в школах.

Серьезный вклад в усовершенствование среднего педагогического образования внесли русские педагоги XIX и начала XX века: К. Д. Ушинский, Н. А. Корф, Н. Ф. Бунаков, которые разрабатывали проблемы деятельности учительских семинарий и многие годы руководили учительскими съездами. С 1911 года на физико-математическом факультете Московского университета был введен факультативный курс педагогики. Педагогика, однако, давалась в крайне абстрактной, далекой от прямых интересов подготовки учителей форме. История педагогических идей освещалась лишь как история западно-европейской педагогики – отечественная педагогическая мысль не получала здесь освещения. Преподававшиеся в университете предметы педагогического цикла никак не были связаны с практикой школы.

Испытание на право преподавания математики проводилось по следующим предметам: аналитическая геометрия, введение в анализ, высшая алгебра, дифференциальное и интегральное исчисление, теория чисел, исчисление конечных разностей, теория вероятностей. Преподаватели математики получали подготовку исключительно в университетах, если не считать тех немногих, которые получали право на преподавание путем полного специального испытания.

В связи с быстрым развитием математической науки и ее приложений в начале XX века вопросы преподавания математики стали привлекать к себе усиленное внимание ученых и педагогов в России и за границей. Особенно активная деятельность по пересмотру программ и методов обучения математике велась в Германии, Франции, Англии, Италии и др., где возникла особая международная комиссия по реформе преподавания математических наук (создана на IV Международном конгрессе в Риме в 1908 году). Главная педагогическая проблема, которая волновала математическую общественность, – это абстрактность математического содержания (как в средней, так и в высшей школе) и отсутствие связи с жизнью. "...Более существенно то, что все они (учебники), в том числе и безупречные с нашей точки зрения, изложены с явным и подавляющим преобладанием абстракции над конкретным материалом и логики над интуицией: сначала предлагаются, в чисто отвлеченной форме, общие определения и положения, и лишь затем они поясняются на частных примерах, зачастую тоже носящих отвлеченный характер..." [225].

При этом **наглядный метод обучения** противопоставляется абстрактно-дедуктивному, а формирование логического мышления и умственное развитие обучаемых – живости изложения учебного материала и прочности удержания в памяти математических фактов.

Общепризнанным считается и второй вывод о невозможности (или недостаточности) умственного развития обучаемого формированием математического мышления на узкоспециальном учебном материале.

Содержание математического образования в средних учебных заведениях России начала XX века слабо увязывалось с математической подготовкой в университетах, тем не менее большую роль в установлении преемственности образования сыграли всероссийские съезды преподавателей математики. Первый съезд состоялся в Петербурге в 1911 году и, в частности, выслушал и принял предложение, касающееся введения в курс средней школы начал высшей математики, именно – понятий о функции, функциональной зависимости и о графическом представлении функций, а также оснований анализа бесконечно малых. Доклады, посвященные этому вопросу, заняли центральное место в работе съезда. Исчерпывающее освещение вопроса о введении начал высшей математики в среднюю школу было дано в сообщении М. Г. Попруженко "Анализ бесконечно малых в средней школе". Съезд определенно высказался о необходимости введения в учебный курс математики понятий о функциональной зависимости, начал анализа и аналитической геометрии. На съезде впервые звучат вопросы о **дифференциации обучения** в старших классах средних школ. Мысль о введении подобной специализации нашла выражение в докладах по вопросу согласования программ математики средней и высшей школы, прочитанных К. А. Поссе и В. Б. Струве. В этих докладах было указано, что в настоящее время учащиеся поступают в высшие учебные заведения совершенно неподготовленными к слушанию курсов высшей математики, и учреждение специальных математических классов в средних учебных заведениях могло бы содействовать математической подготовке абитуриентов средней школы.

Всеобщее внимание вызвали сообщения, настаивающие на введении в программу средней школы **пропедевтического курса геометрии** (интересный доклад по этому поводу был сделан А. Р. Кулишером). Следует отметить, что в настоящее время ученые и методисты-математики все настойчивее высказывают мнения о необходимости усиления геометрической линии в курсе математики V–VI классов.

Вопросы методологических основ методики преподавания математики живо обсуждались на съезде, но было отмечено, что экспериментальная педагогика и ее прикладная сторона находятся еще в стадии разработки и пока, в обычных условиях школьной жизни, не могут быть непосредственно положены в основу обучения математике. Была отмечена эффективность использования **принципа наглядности** (в традиционном понимании) не только на низших ступенях обучения, но по возможности рекомендовалось применять его на всех стадиях преподавания; к обычным формам использования наглядных пособий предлагалось присоединить так называемую “лабораторную методу”, при которой наглядные пособия изготовляются самими учащимися.

Из представленного выше исторического анализа видно, что вопрос о подготовке учителей математики для средней школы был постоянным предметом обсуждения как Министерство образования, так и общественных организаций. С момента возникновения средних школ и вплоть до 70-х годов XIX века в России существовали специальные учреждения, предназначенные для этой цели, – педагогические институты, учительские семинарии. Однако различие во взглядах на задачи и устройство этих учреждений как у высших представителей власти, так и у руководителей педагогических учебных заведений, “вследствие трудности организации этого дела в стране с молодой культурой, при недостатке интеллигентных сил и просвещенных педагогов...” [225] привели к тому, что эти учреждения постепенно прекратили свое существование.

Новая волна организации педагогических учебных заведений пришлась на 1908–1909 годы, не в последнюю очередь из-за бурных событий I русской революции 1905–07 годов. Например, Педагогическая Академия Лиги образования, созданная в 1907 году под покровительством частного общества “Лига образования”, предназначалась для лиц, окончивших какое-либо высшее учебное заведение. Курс Академии был рассчитан на 2 года. Академия культивировала по преимуществу педагогические науки и тесно связанные с ними разделы психологии. Предметная подготовка по математическим наукам была явно недостаточна. Осенью 1909 года открылись временные педагогические курсы в Петербурге, Москве, Киеве и Одессе. Все эти учреждения функционировали при управлении соответствующего учебного округа и были краткосрочными – годичными. На курсы принимались лица, окончившие университеты, которым полагалась стипендия в размере 600 рублей в год.

10 марта 1910 года в Государственную Думу был внесен законопроект об учреждении в Москве педагогического института им. П. Г. Шелапутина. Слушатели, успешно прошедшие двухгодичный курс института, получали звание учителя гимназии, по поступлении на службу время обучения в институте засчитывалось им (через 4 года) в срок действительной службы.

Квинтэссенция исторического опыта преподавания математики в педагогических учебных заведениях позволила В. Ф. Кагану предложить следующую схему учебного плана подготовки будущих учителей математики:

Таблица 1

1. Предметы общепедагогические

№	Дисциплина	Часов в неделю в течение года
1	История философии	2
2	Психология	2
3	Экспериментальная психология	1
4	Логика	2
5	История педагогики	2
6	Школьная гигиена	1
	Итого	10

2. Предметы специально-теоретические

№	Дисциплина	Часов в неделю в течение года
1	Теоретическая арифметика	3
2	Основания геометрии	3
3	Проективная геометрия	2
4	Черчение и решение конструктивных задач	2
5	Коммерческая арифметика	1
6	Теоретическая физика	2
7	История математики	2
	Итого	15

3. Предметы методические

№	Дисциплина	Часов в неделю в течение года
1	Методика арифметики	1
2	Методика геометрии и тригонометрии	2
3	Методика алгебры	2
4	Методика физики	2
5	Методика космографии	1
	Итого	8

4. Практические занятия

№	Дисциплина	Часов в неделю в течение года
1	Семинарские занятия по всем отделам	4
2	Производство опытов по физике	2
3	Производство опытов по химии	1
4	Пробные уроки и их обсуждение	–
5	Замещение преподавателей, посещение уроков опытных педагогов	–
	Итого	7

Представленная программа частично реализовывалась в Одессе и была рассчитана на двухлетнее обучение. Если учесть, что университетский курс рассчитан на 4 года, но и в этот срок заканчивало лишь небольшое меньшинство (большинство затрачивало на это 5 лет и более), то готовность к преподаванию в средней школе требовала 7–8 лет обучения (вместе с двухлетними курсами).

Таким образом, на протяжении столетий явно прослеживается дихотомия педагогического процесса обучения математике: фундаментальная подготовка (университетское образование) абсолютно независима от дальнейшей профессиональной деятельности и методическая подготовка (педагогические курсы, институт, гимназии) явно недостаточна ввиду неразвитости методологических оснований педагогического процесса.

Вторая проблема, оставшаяся неразрешимой в образовательном процессе, – это оторванность университетского преподавания математики от средней школы. Трудно оценить тот вред, который наносит эта “система двойного забвения”, по меткому выражению Ф.Клейна, когда, переходя из средней школы в университет, студент забывает то, чему учился в средней школе; кончая университет и начиная преподавать, он прежде всего забывает то, чему он учился в университете.

В организационном отношении, как уже отмечалось, при уставе 1804 года существовала тесная связь университетов и средних школ. Уваровский университетский устав 1835 года сохранил в деятельности факультетов лишь “испытание кандидатов на учительские места в гимназиях и уездных училищах округа, если они не снабжены надлежащими для того аттестатами и свидетельствами” [76]. При действии устава 1863 года за университетами еще остается испытание на право преподавания в средней школе. Устав 1884 года уничтожил эти испытания, и лица, сдавшие экзамен государственной экзаменационной комиссии, стали приобретать право преподавания.

Нельзя обойти вниманием и тот факт, что средства, выделенные правительством на народное образование, постоянно оставались на мизерном уровне. В 1910 году было ассигновано на народное образование 96312958 рублей; в среднем на одного ученика приходилось около 14,4 рубля, на одну школу – 960,5 рубля, а на одного жителя России – 58,4 копейки. При этом большинство детей школьного возраста оставалось за порогом школы. Всего в начале XX века в России было 19 учительских институтов, 2 высших педагогических института и 150 учительских семинарий.

Третья проблема математического образования до революции 1917 года – это почти полное отсутствие профессионально-педагогической направленности обучения математике в университетах (которые давали основную массу учителей средних школ) и недостаточная фундаментальная подготовка в учительских институтах.

Хотя в России сложилась сеть учебных заведений по подготовке учительских кадров, она не представляла собой научнообоснованную систему педагогического образования. Все расходы на учительские институты и семинарии по смете 1916 года предусматривались в сумме 11 млн. рублей, в том числе на учебные цели только 420 тыс. рублей. Содержание, структура, объем математической подготовки будущих учителей математики определялись регионально, без должного теоретического обоснования, с существенным разрывом между фундаментальной и методической подготовкой (там, где она имелась).

Четвертый период организации подготовки учителя математики для средних школ начался в 1917 году и длился до 2003 года. Этот период характеризуется самодостаточностью высшего педагогического образования (по отношению к классическому университетскому образованию) для решения социальных задач подготовки учителей математики в России.

Развитие системы педагогических учебных заведений после революции 1917 года определялось экономическим положением страны, политическими установками, возросшими потребностями в народном образовании. В 1918 году Государственная Комиссия по просвещению утвердила положение о преобразовании учительских институтов, семинарий и курсов в педагогические институты. Срок обучения в институтах определялся в 4 года. Постановлением Наркомпроса студенты III и IV курсов пединститутов обязывались ежедневно работать в единой трудовой школе два-три часа. Учителя средних школ готовились также на педагогических факультетах государственных университетов. Характер и содержание деятельности педагогических вузов в значительной мере определялись учебными планами и программами. В течение первых десяти лет работы советских педвузов не было ни единых общесоюзных планов, ни единых программ. Учебные планы страдали многопредметностью, энциклопедизмом, не были подчинены единой цели, мало выделялось времени на педагогическую практику.

В то же время в ходе реорганизации высшей школы были допущены серьезные ошибки. Так, на рубеже 1930 года академические группы разделялись на бригады по 3–5 студентов, которые без систематического руководства квалифицированных преподавателей должны были заниматься изучением, “проработкой” учебных заданий. Этот “активный бригадно-лабораторный метод” занятий почти полностью ликвидировал лекционные курсы, читаемые крупными учеными. Чтение общих и специальных курсов было заменено вступительными лекциями к самостоятельной работе студенческих бригад, а экзамены и зачеты как индивидуальная форма оценки знаний студентов были заменены коллективным отчетом бригад о “проработке” ими учебных заданий. Такое распределение учебного времени не могло удовлетворять требованиям профессионально-педагогического образования, так как чрезмерно сокращалось время на теоретическое обучение, в том числе на подготовку к педагогической практике.

Приведем в качестве примера учебный план Ярославского пединститута (физико-математический факультет) 1932/33 учебного года.

Программа по анализу для физико-технического отделения математической секции

III семестр

Неперово число e.
Натуральные логарифмы.
Дифференцирование показательной и логарифмической функций.
Упражнения.
Обратные круговые функции и их дифференцирование.
Упражнения.
Неявные функции.

Упражнения.
Понятие интеграла.
Основные формулы интегрирования.
Метод подстановки.
Упражнения.
Вычисление определенных интегралов.
Упражнения.
Интегрирование по частям.
Упражнения.
Задачи на вычисление площадей.
Упражнения.

30 часов

IV семестр

Общая теория рядов: понятие сходимости, ряды с положительными членами, признак Даламбера, гармонический ряд, ряды $\sum \frac{1}{n^p}$, условно сходящиеся ряды, степенные ряды.

Разложение функций в ряд Тейлора и Маклорена.

Функции от многих переменных. Частные производные. Полный дифференциал.

Двойные интегралы. Вычисление площадей, объемов, моментов инерции, нахождение центра тяжести.

Криволинейный интеграл. Теорема Грина на плоскости.

36 часов

VI семестр

Определение, происхождение дифференциальных уравнений. Постоянные интеграции. Частные и общие решения.

В дальнейших разделах будут даны примеры перехода количества (постоянного интеграции) в качество (род кривой) и попутно принадлежность различного рода кривых одному дифференциальному уравнению (как иллюстрация единства противоположностей), как, например, прямая, именно, ось “$X^{\underline{\text{ов}}}$” и цепная линия удовлетворяют одному уравнению $y'' = a^2 y$, парабола и логарифмическая кривая удовлетворяют одному уравнению $xy'' = \sqrt{1 + y'^2}$.

Дифференциальные уравнения первого порядка. Определение переменных.

Уравнения в точных дифференциалах.

Интегрирующий множитель.

Линейные уравнения первого порядка. Замена переменных. Однородные уравнения.

Уравнения высших порядков.

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами, однородные и со вторым членом.

Особые решения дифференциальных уравнений (примеры), уравнение Клеро.

30 часов

Сравнивая учебные программы с современными (в том числе с Государственным образовательным стандартом), наглядно убеждаешься в консервативности математического образования будущих учителей математики.

Тем не менее, очевидным положительным выводом из этого факта является выявление устойчивых норм затрат учебного времени на прохождение тех или иных тем и разделов математики.

В 1930–1931 годах все педфаки университетов реорганизуются в пединституты. В педагогических институтах сокращается число общеобразовательных предметов с 22 в 1927 году до 9–10 в 1931 году. На предметный блок учебного плана (в том числе на математические дисциплины) отводилось до одной трети планируемых часов. Время на педагогическую практику увеличилось до 38–40% всего учебного времени. В рубежном постановлении ЦИК СССР от 19 сентября 1932 года “Об учебных программах и режиме в высшей школе и техникумах” во всех учебных заведениях упрочивался принцип единоначалия, повышались полномочия и ответственность руководителей учебных заведений, кафедр, профессорско-преподавательского состава за организацию учебно-воспитательного процесса; укреплялись дисциплина и порядок в институтах; вводился единый типовой устав вуза.

На основе этого постановления вновь пересматривались учебные планы и программы, в которых на общенаучные и специальные предметы отводилось не менее 80–85% учебного времени. Категорически запрещалась ломка учебных планов и программ в течение учебного года. Кроме обязательных вводились факультативные дисциплины, имеющие отношение к будущей специальности, запрещались коллективные зачеты, вводилась дифференцированная форма оценок знаний, устанавливались две зачетные сессии в учебном году, экзамены и дипломные работы.

В 1936 году была принята новая широкая программа мер по дальнейшему развитию высшего образования, которая нашла выражение в развернутом постановлении “О работе высших учебных заведений и о руководстве высшей школой”, регламентирующих работу вузов; основные положения этого постановления сохраняют свою силу до сих пор. Рост сети и контингента педагогических учебных заведений с 1934 по 1937 годы в целом по СССР виден из следующей таблицы [213]:

Таблица 2

Годы	Пединституты		Учительские институты		Педучилища	
	Количество заведений	Число студентов	Количество заведений	Число студентов	Количество заведений	Число студентов
1934	115	69989	43	5316	772	166587
1935	102	74560	91	21946	748	186620
1937	96	72595	98	34489	760	226635

Несмотря на очевидные успехи в деле организации подготовки учителей математики для средних школ в довоенный период, качество подготовки, укомплектованность высококвалифицированными научно-педагогическими кадрами находились на невысоком уровне. Открытие большого числа учительских институтов привело к тому, что лишь 10% преподавателей имели ученые степени и звания. **Учебный план пединститутов по математике представлял собой “урезанный вариант” учебных планов университетов; имела место недооценка частных методик, слабая разработка актуальных проблем дидактики, методов обучения математике, педагогики высшей школы.**

Тем не менее в системе педагогического образования работали такие выдающиеся математики и методисты, как Л. Н. Запольская (1871–1943 гг.), Н. А. Извольский (1870–1938 гг.) и другие. С 1924 по 1930 годы кафедру математики Ярославского пединститута возглавляла профессор Л. Н. Запольская. Она окончила высшие женские курсы в Петербурге (1894 г.), училась в Геттингене (Германия), под руководством

Д. Гильберта написала и защитила диссертацию, получив степень доктора философии (1902 г.). По возвращении в Россию Л. Н. Запольская защитила в Московском университете диссертацию на соискание ученой степени магистра математики (1905 г.), а затем ей было присвоено звание профессора. Ее научные интересы лежали в области высшей алгебры. С 1930 по 1938 годы кафедру математики Ярославского пединститута возглавлял профессор Н. А. Извольский. Он известен не только как крупный ученый-геометр, но и как ученый-методист, пропагандист математических знаний. Н. А. Извольский – участник всероссийских съездов преподавателей математики, редактор и издатель журнала “Математический вестник”, автор учебника по элементарной алгебре и первого в России учебника по истории преподавания геометрии.

Профессор Московского государственного пединститута И. В. Арнольд (1900–1948 гг.) учился в Одессе у известных математиков В. Ф. Кагана, Н. Г. Чеботарева, С. О. Шатуновского. Области его исследований – современная алгебра, теория чисел, основания геометрии. В 1942 году кандидат физико-математических наук И. В. Арнольд становится первым в Советском Союзе доктором педагогических наук по методике преподавания математики. Его книга “Теоретическая арифметика” (1938 г.) оказала значительное влияние на преподавание этого курса в пединститутах.

Значительное влияние на организацию математического образования в педвузах оказали также Г. Ф. Вороной, А. И. Маркушевич, Д. А. Райков, Е. А. Щегольков, И. К. Андронов, Г. И. Глейзер и др.

Конкретная программа мер по совершенствованию работы педагогических вузов была намечена в постановлении СНК СССР от 20 августа 1945 года “Об улучшении дела подготовки учителей”. Была прекращена практика краткосрочной подготовки учителей из лиц, не имеющих среднего образования, установлены разные категории пединститутов, учительских институтов и педагогических училищ с постоянным количеством набора на I курс, расширена аспирантура при пединститутах. С 1952 года учительские институты реорганизовались в педагогические институты. Так была создана единая система подготовки учителей для V–X классов. В дальнейших постановлениях правительства санкционировалось развитие факультетов и отделений по однопрофильным специальностям с четырехлетним сроком обучения, сохранена также подготовка по двум специальностям для малокомплектных школ (со сроком обучения 5 лет). Упорядочивалась учебная нагрузка студентов: предельная недельная нагрузка студентов всеми видами учебных занятий, включая факультативные, была определена на I–IV курсах в 36 часов, на V курсе – 30 часов.

В конце 60-х годов Министерство просвещения СССР разработало и осуществило широкий план мероприятий по приведению учебно-воспитательного процесса в педвузах в соответствие с требованиями научно-технического прогресса и с реформой средней школы. Прежде всего было решено усовершенствовать учебные планы и программы, составленные в 50-е годы. В них имело место значительное сокращение учебных часов на теоретическое обучение за счет увеличения времени на производственную практику (оно достигло 30 недель). На математических факультетах были введены новый предмет (“Научные основы школьного курса математики”), программа которого была разработана академиком А. Н. Колмогоровым, и объединенные курсы математического анализа и теории функций, алгебры и теории чисел, геометрии. Тем не менее был ликвидирован обширный курс элементарной математики и заменен практикумом по решению математических задач, что негативно сказалось на профессиональной подготовке будущих учителей математики.

Усугублялась ситуация, о которой знаменитый немецкий математик Ф. Клейн еще в 1924 году писал как о “двойном разрыве” между школьной и вузовской математикой, указывая на необходимость преподавания элементарной математики с точки зрения высшей. Существенные недостатки, не ликвидированные до настоящего времени, выявляются в математической подготовке студентов. Главные из них: формализм знаний, недостаточность сформированности целостности математических объектов, слабая развитость логико-модельного мышления, недостаточная прочность знаний, умений, навыков и методов школьной математики, слабая взаимосвязь школьной и вузовской математики. Студенты плохо представляют механизм и особенности усвоения математического содержания как профессиональной основы для построения обучения математике в школе.

В дальнейшем развитии математического образования будущих учителей математики указанные трудности и противоречия нарастали.

Несмотря на изменение номенклатуры специальностей, введение новых учебных предметов (например, информатики), ликвидацию других (например, курсов математической логики, числовых систем и т.д.), усиление контроля за самостоятельной работой студентов и т.п., существенного улучшения достигнуто не было.

Пятый период совершенствования структуры профессиональной подготовки учителя математики связан с подписанием Россией в 2003 году Болонских соглашений и переходом на многоуровневую систему образования (бакалавр-магистр).

Улучшение профессиональной подготовки учителя математики требует не только новых, более эффективных путей организации учебно-воспитательного процесса в педвузе, но и пересмотра структуры и содержания математической подготовки студентов, поднятия ее на технологический уровень.

Педагогические технологии, проявившиеся в США в 50-х годах теоретической разработкой программированного обучения, в настоящее время активно разрабатываются в различных странах мира, в том числе и в России (В. П. Беспалько, В. М. Монахов, М. В. Кларин, Ф. Янушкевич и др.). Представление о педагогической технологии “как о систематичном и последовательном воплощении на практике заранее спроектированного учебно-воспитательного процесса” все же по-разному трактуется отечественными и зарубежными педагогами. Многие авторы даже не делали различия между понятиями “технология обучения”, “обучающая технология”, “педагогическая технология”. В. И. Богомолов отмечает: “терпимость к различным формулировкам наблюдается на фоне общей тенденции перехода к пониманию педагогической технологии как педагогической системы, в которой использование средств обучения повышает эффективность учебного процесса” [28].

Эффективное достижение планируемых учебных результатов зависит от развития технических средств обучения, управления познавательной деятельностью обучаемых, оптимизации образовательного процесса, использования новейших исследований в области психофизиологических механизмов восприятия, памяти и мышления. Родоначальники программированного обучения Б. Скиннер, Н. Краудер, основываясь на бихевиористической теории обучения (стимул $\longrightarrow$ реакция $\longrightarrow$ подкрепление), определили его характеристические черты: полный набор учебных целей, подбор критериев их измерения и оценки, точное описание условий обучения. В то же время неуправляемое становление приемов мыслительной деятельности, ориентация на репродуктивный тип обучения, неразработанность мотивации учебной деятельности, невозможность диагностирования опыта творческой деятельности заставили педагогов и психологов трезво оценить возможности программированного обучения. Модная современная форма программированного обучения – дистанционное обучение.

В последние десятилетия весь мир с упоением окунулся в море информационных технологий в образовании: мультимедиа, дистанционное обучение, телекоммуникации, графические калькуляторы и т.п. На представительном международном форуме по проблемам математического образования в Греции (Самос, 1998 г.) большинство докладов, сообщений и круглых столов в той или иной мере трактовали вопросы внедрения информационных технологий в учебный процесс. Сотни университетов в мире (например, American Distance Education Consortium, в состав которого входят 55 университетов) ведут информационный обмен образовательными программами через Internet, осуществляя подготовку специалистов на основе дистанционного обучения (remote education), по последним данным таких студентов уже более сотни тысяч. Но в данной связи необходимо четко расставить акценты относительно возможностей профессиональной подготовки учителя: информационные технологии как средство обучения – да, информационные технологии как структурообразующий фактор педагогической системы – да, дистанционное обучение как парадигма в подготовке учителя, альтернативная личности преподавателя, – нет (по крайней мере, на данном этапе развития средств коммуникации и информационного обмена).

В обоснование последнего положения приведем следующие аргументы:

– “неуправляемое становление приемов мыслительной деятельности”. Именно этот фактор привел к неудовлетворительным результатам реализации идей программированного обучения (Э. Торндайк, Б. Скиннер, Н. Краудер и др.) в 60–70-х годах XX века. В основе неудач лежал необоснованный перенос принципов научения животных на процесс обучения человека со своими специфическими особеностями.

Н. Ф. Талызина видит причины неудач скиннеровского подхода в выборе неадекватной психологической теории, обосновывая использование деятельностной теории учения с получением качественно новых результатов, доказывающих возможность управления становлением рациональных приемов мышления у человека. Однако в данном случае речь уже идет о принципах программирования процесса обучения с реальным взаимодействием учителя и ученика [222].

– отсутствие (реального, а не интерактивного) взаимодействия учителя с учениками, между учениками, несущее в себе возможности активизации направленных и взаимообуславливающих полифункциональных факторов адекватного восприятия новой информации: перцептивных, мнемических, эмоциональных, волевых и т.п.

– нарушение целостности интериоризации визуально-логического ряда перцептивных образов новой информации ввиду искусственного ограничения поля восприятия и динамики обращения с репертуаром кратковременной и долговременной памяти.

Все сказанное относится к вопросу эффективности дистанционной и очной форм обучения и притом в области профессионально-предметного блока подготовки учителя математики; естественно, что увеличение временных периодов для дистанционной формы обучения равно как и создание специфических дидактических методов и усовершенствование средств, способных компенсировать отмеченные недостатки.

Таким образом, эффективность дистанционного обучения (при условии его качественной организации и содержания) достигается за счет больших временных затрат и возможности оперативного воспроизведения его учебных элементов.

М. В. Кларин [89] отмечает, что по логике технологического подхода к процессу обучения есть две возможности: либо распрощаться с учителем как с фигурой, определяющей учебный процесс, заменив его обучающим устройством, либо ограничить его роль консультативно-организационными функциями (причем для такой работы не обязательна высокая квалификация учителя). **Видимо, существует и третья возможность – при соблюдении основных технологических принципов учитель высокой квалификации и педагогического мастерства творчески управляет педагогическим процессом в совместной деятельности с активно познающим новое знание обучаемым.** Современные педагогические технологии В. М. Монахова [133], М. А. Чошанова [246], В. П. Беспалько [23] и др. ориентируют именно на это направление развития педагогических технологий. Существенным является то, что технические средства обучения (ТСО) – аудиовизуальные, телекоммуникационные, электронные, интерактивные и т.п. – рассматриваются именно как технологические средства, но не определяющие существо педагогической технологии. Наше исследование педагогических технологий в большей степени будет касаться вопросов системного анализа, психологии обучения математике, управления познавательной деятельностью студентов, научной организации педагогического труда. “Технология полного усвоения” (Дж. Кэррол, Б. Блум, Л. Андерсон и др.) не является предметом данного исследования, авторы более придерживаются концепции “гибкой педагогической технологии” [246], в том числе решающей проблемы организации эффективной творческой деятельности студентов.

Математическое образование студентов педагогических вузов наиболее восприимчиво к технологическим новациям ввиду модельного характера содержания и глубоких внутренних взаимосвязей математической деятельности.

Таким образом, реализуемое в настоящее время математическое образование в педагогических вузах требует серьезных качественных изменений, которые могут определить этап в его развитии.

В основе исследования лежал анализ результативности существующей системы математической и методической подготовки учителя математики в педагогическом вузе, который проводился в течение 10 лет на примере Ярославского государственного педагогического университета им. К. Д. Ушинского, ряда других педагогических вузов России (Владимирского, Пермского, Вологодского педуниверситетов, Костромского госуниверситета), а также на примере анализа профессиональной подготовленности учителей математики г. Ярославля и результатов срезового уровня знаний, умений и навыков школьников старших классов. Было установлено, что результаты профессиональной подготовки будущих учителей математики в педагогическом вузе не в полной мере удовлетворяют современным запросам системы народного образования как заказчика, так и запросам исполнителя – профессорско-преподавательского состава педагогических вузов.

В связи с этим математическое образование студентов педвузов рассматривается в настоящем исследовании как элемент авторской концепции высшего педагогического образования в соответствии с Государственным образовательным стандартом Российской Федерации.

1.2. Педагогический процесс обучения математике и его закономерности

В узкопроцессуальном смысле передача социального опыта предшествующих поколений с целью профессиональной подготовки (в нашем случае – обучение математике в педвузе) предполагает наличие следующих необходимых компонентов.

Рис. 1. Динамика преемственности педагогических процессов

Существенным моментом является то, что данная схема получает дополнительные структурные компоненты и связи в динамике профессиональной деятельности учителя. В самом деле, субъект обучения (студент, будущий учитель математики) с началом профессиональной деятельности становится активным транслятором знаний на подкомпоненте объекта содержания математической подготовки учителя – школьном компоненте.

Если трактовать вложение школьного компонента в вузовский как прямое обращение к элементам содержания, то исторический анализ показывает, что только в последние десятилетия (выпускники классических университетов, как правило, не получали полноценной методической подготовки) наметился реальный сдвиг в вузовском преподавании математики в сторону всестороннего изучения школьного знания (А. Н. Колмогоров, Н. Я. Виленкин, А. Г. Мордкович, Г. В. Дорофеев и др.). Однако приложенные усилия не привели к желаемым результатам, хотя очевидно огромное положительное влияние республиканской программы А. Г. Мордковича "Профессионально-педагогическая направленность математической подготовки учителя" (1987–2007 гг.) на совершенствование профессиональной подготовки будущих учителей математики. Анализ отчетов председателей ГАК педуниверситетов России на рубеже введения Государственного образовательного стандарта (1990–1997 гг.) показал наличие существенных недостатков готовности выпускников к профессиональной деятельности.

Более того, ориентация на активное освоение обучаемым способов и приемов познавательной деятельности, на возможности самораскрытия личности и учет ее интересов и потребностей создает условия для придания педагогическому процессу личностноориетированного и инновационного характера. Инновационное обучение – процесс и результат такой учебной деятельности, которая стимулирует вносить инновационные изменения в существующую культуру [90]. Изменение социальной роли знаний (в частности, математических) и творческих возможностей личности в современный период развития общества неизбежно ставит вопросы об оптимальном соотношении технологических и гуманистических ориентаций в организации обучения математике в педвузе, создания условий для самостоятельного освоения нового опыта.

В формировании личности учителя-профессионала основной компонент содержания образования определяется опытом личности, включающим целостные блоки предметной, методической (технологической), общекультурной и психолого-педагогической (методологической) подготовки. В соответствии с психолого-педагогическими закономерностями становление этого опыта создает основу для развития личностных качеств, формирования и развития эмоционально-волевой сферы, характера и способностей обучаемого. Существенной особенностью является то, что логика проектирования и развертывания (дидактического раскрытия) учебных предметов профессионального образования направлена на интериоризацию базовых учебных элементов (знаний, умений, навыков) в процессе приобретения, применения и преобразования опыта, в то время как для эффективности профессионально-предметной подготовки учителя математики необходимо повторное (по отношению к школьному образованию) обращение в математических дисциплинах к базовым учебным элементам в расширенном и обобщенном качестве (знания, умения, навыки, математические методы – алгоритмы, процедуры), в том числе с методологических и методических позиций. В принципе этот процесс осознан еще в начале XX века в период коренного поворота к реформам школьного образования. Проблемы фуркации, фузионизма, "экономии мышления", наглядности активно обсуждались на международных математических конгрессах (1897–1914), всероссийских съездах преподавателей математики (1911–1914): "история математики в связи с историей культуры и школ, история обучения математике, философское обоснование научных проблем и гносеология математических понятий, сравнительная методология и научные завоевания, наконец, демократизация науки – вот что должно составлять основу педагогики математики" [255].

Таким образом, необходимо существенно перестроить структуру и содержание математической подготовки студентов на основе психолого-педагогического анализа и целостного подхода к инновационному педагогическому процессу с учетом опыта предшествующих исследований.

Система (от греч. Systëma – целое, составленное из частей, соединение) – множество элементов, находящихся в отношениях и связях друг с другом, образующих определенную целостность, единство [231].

Таким образом, любая система включает ряд взаимосвязанных аспектов: элементарный, определяющий содержание компонентов, из которых образована система; структурный, раскрывающий внутреннюю организацию системы и способы взаимодействия ее компонентов; функциональный, показывающий, какие функции выполняет система и ее компоненты; интегративный, раскрывающий источники, факторы сохранения, совершенствования и развития; исторический, объясняющий, каким образом возникла система, какие этапы она прошла, каковы перспективы ее развития. В. Г. Афанасьев [10] отмечает четыре основных класса целостных систем, различие которых связано с субстанциональной природой системы, ее сущностью, характером и происхождением.

Первый класс – это те системы, что существуют в объективной действительности, неживой и живой природе и обществе.

Второй класс – концептуальные, идеальные, с различной степенью полноты и точности, в той или иной мере отражающие реальные системы.

Третий класс – искусственные, которые спроектированы, сконструированы и созданы человеком в определенных целях.

Четвертый класс систем – “смешанные”, в которых органически слиты элементы, являющиеся продуктом естественной или общественной природы, и элементы, созданные человеком.

Если целостность в методологии означает высокий уровень сформированности и развития явления, качественную его полноту, совершенство, идеал, когда явление полностью реализует присущие ему функции, то применительно к педагогическим процессам “целостность заключается в том, что части общей педагогической системы служат общей цели” [10. С. 103].

Так, В. С. Ильин [74] выделяет в структуре теории целостного учебно-воспитательного процесса общую теорию формирования личности, в которой описываются закономерности функционирования и развития всей совокупности факторов формирования личности, и частные теории, которые характеризуют функционирование и развитие компонентов этой совокупности.

С его точки зрения целостность процесса обучения означает высокий уровень его эффективности в формировании не только отдельных качеств личности, но и личности в целом.

М. И. Рожков [169] считает, что “педагогический процесс целесообразно рассматривать как целостную динамичную систему, системообразующим фактором которой является взаимодействие педагога и ученика, в котором реализуются задачи обучения, воспитания и развития личности в их единстве и взаимосвязи”. При этом педагогический процесс – это не механическая сумма основных составляющих компонентов, а самостоятельное целостное явление, которое имеет свои закономерности.

Группа немецких педагогов разработала в 1990 году проект “целостной школы”, которая как открытая система должна быть оживлена во всех параметрах педагогического процесса: субъекте познания, учебном материале, формах и методах подачи знаний и организации школьной среды, тесно связанной с социальным окружением. А это означает установление разнообразных горизонтальных и вертикальных связей как критерия целостности.

Так, В. П. Беспалько [23] под педагогической системой понимает определенную совокупность взаимосвязанных средств, методов и процессов, необходимых для создания организованного, целенаправленного и преднамеренного педагогического влияния на формирование личности с заданными качествами. Обобщая и систематизируя разрозненные подходы к понятию педагогической системы, он синтезировал педагогическую систему как вполне определенную целостность (см. рис. 2).

Рис. 2. Педагогическая система

Л. Ф. Спирин [216] в каждой педагогической системе выделяет девять инвариантных компонентов. Это – организатор системы (управляющие подсистемы: учитель, транслятор, ТСО и т.п.); цель системы – социальный заказ; тот, для выполнения которого образуется система (управляемая подсистема – ученик); содержание воспитательно-образовательной работы; социально-нравственные и дидактические отношения между членами системы (субъективно-объективные и субъективно-субъективные одновременно); педагогические средства системы; ориентационные формы системы; методы обучения и воспитания как методы соотнесения деятельности тех, кто учит, и тех, кто учится; продукты деятельности системы в виде знаний, умений, навыков в структуре мировоззрения и характерологических качеств воспитуемых, их состояний и поведения.

Анализ этих и других подходов в образовательных процессах показывает, что в любой педагогической системе присутствуют содержательная, процессуальная и результативная составляющие. В содержательном плане педагогическая система представляет собой целостный объект, имеющий следующие характеристики:

– компоненты системы;
– структура внутренних и внешних взаимосвязей;
– функциональность;
– интегративные качества;
– обобщенность.

При изучении проблемы развития теоретических основ педагогического процесса математического образования будущих учителей математики (объект – транслятор – субъект) целесообразно построить **идеальную модель педагогического процесса, удовлетворяющую критериям целостности, функциональности, интегративности в единстве внутренних и внешних взаимосвязей ее компонентов.** Важным исходным пунктом для разработки такой модели является понятие функциональной физиологической системы [4]. На основании комплекса экспериментальных работ, связанных с развитием теории функциональных систем в различных физиологических направлениях, П. К. Анохиным была предложена универсальная модель работы мозга и сформулированы центральные механизмы целостных приспособительных актов любой степени сложности. Ведущими в построении функциональных систем выступают закон результата и закон динамической мобилизации структур, обеспечивающих формирование функциональной системы и получение данного результата [4].

Принципы системного квантования, проблемности и модульности лежат в основе функциональных систем психической деятельности человека, выраженных различными знаковыми системами [246].

Педагогические системы математического образования (методические системы обучения, системы методической подготовки и т.п.) исследовались в работах А. М. Пышкало, В. П. Беспалько, А. Г. Мордковича, Г. Л. Луканкина, В. А. Гусева, Е. И. Смирнова, В. А. Тестова, В. Л. Матросова, М. И. Шабунина, Ю. В. Сидорова, Г. Г. Хамова, Н. Л. Стефановой, В. А. Кузнецовой и др.

Целостный подход к проблеме позволяет нам предложить следующую модель педагогического процесса подготовки учителя математики (см. схему 1, с. 56).

В качестве объективных и субъективных факторов выступают потребности и интересы общества, методическое обеспечение обучения, уровень подготовленности преподавателей, педагогическая ситуация и макроситуация (экономическая, политическая), в рамках которых осуществляется формирование педагога-профессионала и его последующая деятельность.

Завершается процесс обучения формированием профессионально-педагогической готовности индивида к выполнению самостоятельной деятельности. Уровень готовности определяется на основе сформированности предметных знаний и умений, педагогических знаний и умений, а также на основе профессиональной идентичности личности и профессии.

Формирование педагога-профессионала – это многоэтапный процесс. Он может и должен начинаться до поступления школьника в профессиональное учебно-педагогическое учреждение, но данный процесс не может закончиться одновременно с его окончанием. Количественные и качественные характеристики профессионализации личности педагога зависят от стадии его профессионального становления. Они будут различны на этапе допрофессиональной подготовки, на стадии профессионально-педагогического обучения и на стадии самостоятельной профессиональной деятельности. Тем не менее, между этими показателями должна быть преемственность, которая отражает общую динамику и направление развития личности педагога-профессионала.

Схема 1

Педагогический процесс подготовки учителя математики

Нормативный объем и содержание профессионально-педагогических целей и задач определяются требованиями к уровню готовности личности к обучению в педвузе и последующей деятельности в качестве учителя на данном этапе развития общества. Готовность зависит от уровня сформированности предметных знаний, умений и навыков в области математики, развития специальных способностей и качеств личности (интеллектуальный уровень, характер, темперамент, функциональные механизмы психики), от уровня сформированности общеучебных знаний и умений (адаптивные возможности, коммуникативные качества), а также отношения школьника к обучению в педвузе и будущей профессиональной деятельности (направленность личности, мотивы, интересы).

Гармонизация интересов общества и личных интересов и мотивов деятельности студентов педвузов определяет следующие цели и задачи организации целостного педагогического процесса подготовки учителя математики:

– обеспечить подготовку учителя математики на высоком предметном, педагогическом, гуманитарном и методическом уровне с широким спектром реализации профессиональных возможностей для работы в разнопрофильных школах;

– формировать в ходе педагогического процесса социально адаптированной профессии личности учителя математики:

а) мотивацию обучения; включенность в систему: педколледж – вуз;

б) общеучебные знания, умения, навыки;

в) адаптивные возможности.

– формировать творческую активность личности учителя математики;

– обеспечить развитие профессиональных качеств личности будущего учителя математики:

а) математическое мышление;

б) педагогическое мастерство;

в) волевые и интеллектуальные качества;

г) коммуникативные качества;

д) функциональные механизмы психики (восприятие, мышление, речь, память, психомоторика, самоанализ);

е) характер, темперамент, способности.

Концепция исследования представляет собой одно из решений проблемы определения содержания и технологии математического образования будущего учителя математики:

1. Педагогический процесс математического образования определяется представлением о нем как о **научно-управляемом процессе**,

– имеющем целью достижение высокого уровня математической готовности выпускников педвузов к выполнению функций обучения, воспитания и развития обучаемых средствами математики,

– связанном с реализацией общедидактических принципов: научности, доступности, гуманизации, дифференциации и т.д.,

– организуемом с учетом современного состояния школьного образования: Государственного образовательного стандарта средней (полной) школы, разнообразия форм средних учебных заведений, вариативности учебных программ и учебников, разработки новых педагогических технологий,

– определяемом рядом структурообразующих факторов: углубления математической подготовки на основе базового школьного компонента, реализации технологии наглядного моделирования в обучении математике, профессионально-педагогической направленности математического образования.

2. Эффективная организация учебно-методической деятельности студентов требует реализации важных для математической деятельности дидактических принципов: фундирования, целостности, профессионально-педагогической направленности, наглядно-модельного обучения, оптимальности, развивающего обучения.

Реализация рассмотренных принципов в педагогической системе математического образования должна осуществляться в следующих компонентах содержания образования:

– учебный план предметного блока Государственного образовательного стандарта;

– учебные программы (образовательные профессиональные программы) математических дисциплин;

– теоретический и практический материал учебных дисциплин, отражающий содержание учебных программ;

– методологическое и методическое обеспечение преподавания математики на основе критериев отбора содержания математического образования.

Данная типология согласуется с подходом к разработке теоретических основ содержания образования В. В. Краевского и И. Я. Лернера, которые различают три уровня проектируемого содержания: общетеоретический уровень (учебный план), уровень учебного предмета (программа) и уровень учебного материала (учебное пособие).

3. Педагогическая система математического образования представляет собой **целостный объект**, имеющий следующие характеристики:

– компоненты системы,

– структура внутренних и внешних взаимосвязей,

– функциональность,

– интегративность,

– обобщенность.

Анализ теоретических работ и реальная практика педагогической деятельности позволяют представить следующие основные **компоненты педагогической системы**:

– мотивы,

– целеполагание,

– содержание и структура математического образования и их модели,

– средства, формы, условия,

– результаты,

– мониторинг функционирования системы.

Педагогическая система математического образования является важнейшей частью системы более высокого уровня – профессиональной подготовки учителей математики – и функционирует в ее составе.

Целеполагающим компонентом целостной модели математического образования будет выступать профессиограмма учителя математики, служащая ориентиром готовности будущего учителя математики и профессиональной деятельности.

4. В процессе обучения математике происходит развитие и трансформация мотивационной сферы студентов педвузов. Как указывает В. Д. Шадриков, “это развитие идет в двух направлениях: во-первых, общие мотивы личности трансформируются в трудовые; во-вторых, с изменением уровня профессионализации изменяется и система профессиональных мотивов”.

Это замечание в полной мере можно отнести к учебной деятельности.

Оценка мотивационной сферы в контексте математического образования достаточно полно может быть представлена при использовании схемы В. Д. Шадрикова [248].

Потребности общества в математическом образовании граждан сильно изменились за последние десятилетия. Теория игр и искусственный интеллект, стохастика и теория информации становятся все более доступными для изучения массового исследователя ввиду развития самих наук, все более значимыми в практическом приложении и фактически еще не представленными в математическом образовании школьника. С другой стороны, именно эти новые знания дают мощный мотивационный заряд изучения математических дисциплин и, как следствие, повышение интереса к профессии учителя математики, поскольку математическое образование наиболее приспособлено к развитию качеств мышления, развитию теоретического мышления (сравнение, эвристика, аналогия, интуиция, анализ, синтез и т.п.). Математическое мышление отличают доминирование логической схемы рассуждений, лаконизм, четкая распределенность хода рассуждений, умение выделить главное, способность к обобщению, анализу, синтезу. Не случайно А. Я. Хинчин считал, что высокий уровень мате-

Схема 2

Модель
математического образования будущих учителей математики
(целостный объект)

матического мышления является необходимым элементом общей культуры человека, и выделял эти 4 характерных признака математического мышления [242].

Схема 3

Схема мотивации деятельности

В течение последних десятилетий "рухнули" веками и десятилетиями не поддающиеся решению математические проблемы: великая теорема Ферма, проблема 4 красок, базисы в сепарабельном банаховом пространстве, 10-я проблема Д. Гильберта и другие. Блестящие теоретические исследования (а также использование компьютерной техники) Я. Перельмана, А. Вайлса, Т. Энфло, Ю. Матиясевича и других "лишили" математический мир отдельных энтузиастов творческого поиска, будущих пионеров мысли, относительно побуждений к математической деятельности; но в то же время и создали основу для эффективной квазиисследовательской деятельности обучаемых в творческом анализе образцов наглядного моделирования в математике.

Более того, в последние годы математика как образовательный предмет все больше рассматривается как гуманитарная (общекультурная), а не только естественнонаучная дисциплина. Продуктивность мышления и восприятия, развитие предметной речи, логическая полноценность аргументации, развитие умственных способностей могут быть реальным результатом математического образования при условии его разумной организации на основе наглядного моделирования.

Как известно, в психологических исследованиях [248] одним из существенных факторов, обусловливающих удовлетворенность обучением, являются оценочные показатели. Исследования, проведенные Ю. П. Поваренковым [201] на физико-математическом факультете Ярославского педуниверситета в группе студентов с устойчивым семейным положением и состоянием здоровья (диагностировались только математические дисциплины) по 6 уровням профессионализации (довузовский, I курс, II курс, III курс, IV курс, V курс), показали следующие данные:

Таблица 3

Оценочные показатели успешности обучения математике

Общее количество респондентов составило 170 человек, в среднем по 28 человек с каждого курса, 0 курс (довузовский) был представлен 30 респондентами классов с математическим уклоном.

Полученные в ходе диагностических замеров данные по каждому из 170 респондентов группировались по курсам и другим основаниям, подвергались различным видам статистической обработки (корреляционный, дисперсионный и факторный анализ, оценка значимости отличий по различным критериям). Обобщенные и структурированные данные сводились в таблицы и представлялись в графической форме.

Таблица 4

В условиях примерно одинакового уровня требовательности при оценивании результатов обучения средние показатели (по 10-балльной системе) имели явный провал между 0 и 1 уровнем, слабый рост до 3 уровня и заметный подъем на 4, 5 уровнях. Так как блок фундаментальной математической подготовки приходится на I–III уровни, то можно сделать вывод о том, что

– переход от школьного математического образования к вузовскому происходит болезненно и отражает существенную разницу содержания математического образования в школе и на I курсе;

– содержание математической подготовки резко контрастирует с содержанием методической подготовки будущих учителей математики как по уровню сложности, так и по интенсивности информации и приемам учебной деятельности.

И самое главное, мотивационная сфера обучаемых в педагогическом процессе претерпевает существенные изменения (сравните с двойным забвением по Ф. Клейну), выравнивание которых представляет актуальную педагогическую проблему.

Поэтому **оценочные показатели успешности обучения будут выше, если уровень математических способностей, интеллектуальные возможности, тип мышления обучаемых будут ориентиром для выбора средств, методов и форм математической подготовки на основе наглядного моделирования в учебной деятельности**. Это повысит эффективность обучения (принцип наилучшего стимула Д. Пойа), так как обучаемый будет получать удовлетворение от самого процесса изучения математики.

Эффективность педагогического процесса математического образования будущих учителей математики в значительной степени определяется ходом дидактического процесса обучения математике, включенностью личности студента в математическую деятельность, активизацией познавательных процессов восприятия сложного математического содержания на основе специально проектируемой учебной деятельности.

1.3. Методологические основы восприятия математических объектов

В современных условиях интенсивного применения математических методов в естествознании, технике, гуманитарных и смежных науках, которое находит свое отражение в изменяющихся учебных программах школьного и вузовского математического образования, настоятельно стоит **проблема более пристального использования и развития в обучении математике психофизиологических механизмов восприятия информации личностью обучаемого** с учетом социально-психологических, социологических факторов развития, в направлении совершенствования математических способностей, качеств и культуры мышления. Естественно-научной основой большинства психологических концепций научения является теория условных рефлексов, разработанная И. П. Павловым для сенсорного научения, и теория инструментальных условных реакций (Дж. Миллер, Н. Конорский, Б. Скиннер) для моторного научения. В. Д. Шадриков [248] считает, что основным содержанием психологических концепций научения является образование когнитивных, сенсорных и кинестетических структур. Существенную роль в их организации играют мотивация и подкрепление (эффект достижения). Уровень исполнения определяется степенью сформированности структур и мотивацией (потребностями).

В основе обучения всегда лежит восприятие наблюдаемых объектов.

Чему бы ни учить, каким бы способом ни учить, мы прежде всего обращаемся к органам чувств обучаемого, являющимся его “окнами в мир”. Слушает ли студент, читает, наблюдает – прежде всего в работу включаются его ощущения и восприятие и только затем – запоминание, установление ассоциаций, осмысление, творческая переработка информации и т.д. Если педагог хочет воздействовать на познавательную деятельность студента, он адресуется первоначально к его органам чувств, особенно зрению и слуху, так как посредством этих анализаторов человек получает большую часть информации.

Восприятие включает в себя осознание предметов, основанное на вовлечении вновь получаемой информации в систему уже имеющихся знаний. Объективной основой восприятия, результатом которого является целостный образ, выступает единство различных сторон и свойств объекта, который воздействует как комплексный раздражитель.

Термин “восприятие” имеет двоякое значение. Он обозначает образ предмета, который возникает в результате процесса восприятия, и сам этот процесс, являющийся активным отображением действительности в чувственном образе. Чувственные образы принято делить на первичные (образы восприятия) и вторичные (образы представления). Первичные возникают в результате непосредственного взаимодействия субъекта с объектом, вторичные – на основе следов в памяти субъекта и образа воображения.

В психологии установлены следующие общие свойства образа восприятия: константность, целостность, структурность, предметность – и свойства образа представления: обобщенность, фрагментарность, избирательность, схематичность и др. [248].

Именно на основе восприятия возможна деятельность других психических процессов – памяти, мышления, воображения. Восприятие как процесс формирования и функционирования чувственного образа действительности есть сложное сочетание различных характеристик – функциональных, операционных и мотивационных. “Восприятие представляет собой отражение предметов и явлений в совокупности их свойств и частей при непосредственном воздействии их на органы чувств” [248]. Хотя информация, которую мы получаем от наших органов чувств, рассматривается, анализируется, подвергается экспериментальной проверке и, более того, подкрепляется такими мощными вспомогательными средствами, как оптические приборы, персональные компьютеры, тончайшие измерительные устройства, полученное с их помощью знание может считаться достоверным лишь в определенных пределах.

В то же время потенциальные возможности автоматических систем визуального распознавания почти безграничны. В некоторых случаях машинное зрение по ряду характеристик превосходит зрение человека, например, при контроле производства приборов, при автоматическом анализе крови и др. В разработке систем искусственного интеллекта важное место занимают вопросы создания технических аналогов органов чувств. Их действие основано на моделировании операций, выполняемых органами чувств живых организмов, в том числе и человека. Модели зрительного восприятия прошли в своем развитии путь от аналоговых систем обработки оптической информации, эффективных, но сложных в реализации, до систем, основанных на современных ЭВМ, вычислительная мощность которых быстро возрастает. В технической системе перцептивного распознавания входным элементом является датчик, задача которого заключается в преобразовании физической величины, характеризующей наблюдаемый объект реального мира, в другую величину, предназначенную для восприятия ее обрабатывающей системой. С этой точки зрения датчик можно рассматривать как согласованный фильтр в том смысле, что его характеристика должна быть согласована с физической величиной, поступающей на его вход. Следующим этапом распознавания образа является разработка процедуры, позволяющей разбивать множество объектов на классы, т.е.

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i, \quad X_i \cap X_j = \emptyset \ \ (i \neq j).$$

Для характеристики элементов множества могут быть использованы различные способы: количественный, вероятностный, двоичный. Процедура классификации заключается в том, чтобы отнести каждый предъявляемый объект к тому или иному классу. Заключительный этап – идентификация объекта. Нас вопросы распознавания образов будут интересовать с точки зрения организации учебной деятельности и оптимального восприятия, тем более, что проблема адекватности восприятия возникает в процессе обучения. Современная физика отказалась от механических моделей или даже наглядных картин физической реальности; она все большее значение придает их математическому описанию. Новейшие области физики столь далеки от чувственного опыта, от повседневной реальности, что постичь их по силам только математике. Так, механика Ньютона дала мощный толчок развитию дифференциального и интегрального исчисления, механика упругих сред – тензорному анализу, термодинамика – гармоническому анализу, квантовая термодинамика – теории локально выпуклых пространств и обобщенных функций Л. Шварца и С. Л. Соболева, квантовая механика – теории неограниченных операторов в банаховом пространстве и т.п.

Дело в том, что, с одной стороны, математический язык обладает естественным “формализмом”, каждый математический знак, символ, геометрическая фигура, диаграмма или график уже есть обобщение, "уход" от реальных объектов и ощущений, и чем выше раздел математики, тем абстрактнее математический язык. С другой стороны, личность обучаемого должна быть обогащена рациональным и логическим мышлением (анализ, синтез, аналогия, конкретизация и т. п.), развитие которого является одной из важнейших задач математического образования. И, как результат, развитое логическое мышление позволяет свободно оперировать математическим языком. Но у этой проблемы есть и третья сторона: адекватность естественного языка с его спецификой научных терминов и понятий математическому языку символов. Как подчеркивает А. Я. Хинчин [242], "сущность формализма математических знаний заключается именно в нарушении правильного взаимоотношения между внутренним содержанием математического факта и его внешним (символическим) выражением". Поэтому всюду, где степень абстрагирования достаточно высока, обращение к чувственному восприятию дает, как правило, неглубокий поверхностный взгляд на объект восприятия, мало способствует пониманию существа явления.

Приведем следующий классический пример.

Пример 1.1. Пусть нам дан треугольник ABC. "Докажем", что $|AB| + |BC| = |AC|$.

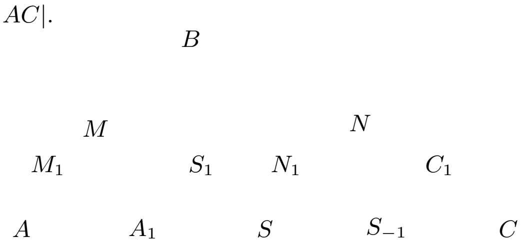


Рис. 3

Отметим средние линии: MS и NS. Тогда $|AB| + |BC| = s = |AM| + |MS| + |NS| + |NC|$. Отметим средние линии: M_1A_1, A_1S_1, N_1S_{-1}, C_1S_{-1}. Тогда $s = |AM_1| + |M_1A_1| + |A_1S_1| + |S_1S| + |SN_1| + |N_1S_{-1}| + |S_{-1}C_1| + |C_1C|$.

Продолжая этот процесс, наглядно видим, что точки M_n, S_n, N_n и C_n при больших n "скроются" за реальной толщиной линии AC и равенство "установлено". Опора на чувственное восприятие приводит к абсурду.

С другой стороны, в иных случаях чувственная наглядность для важных фактов в математике просто невозможна. Рассмотрим другой классический пример – пример Ван-дер-Вардена непрерывной на отрезке и нигде не дифференцируемой функции.

Пример 1.2. Пусть $\varphi_0(x) = |\arcsin(\sin \pi x)|$ – непрерывная на всей числовой прямой **R** функция. Рассмотрим функции

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}\left|\arcsin(\sin 2\pi x)\right|;$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2^2}\left|\arcsin(\sin 2^2\pi x)\right|;$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2^n}\left|\arcsin(\sin 2^n\pi x)\right|;$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$

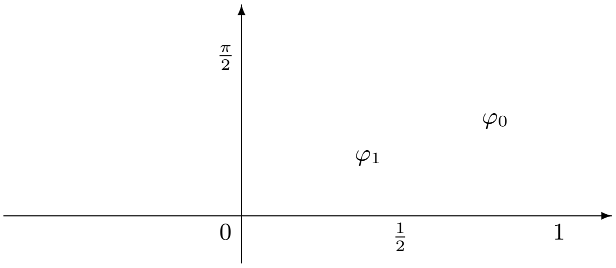


Рис. 4

Составим функциональный ряд из непрерывных функций

$$\varphi_0(x) + \varphi_1(x) + ... + \varphi_n(x) + ...$$

Ясно, что по признаку Вейерштрасса ряд сходится равномерно на **R** (мажорантный ряд $\pi(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n+1}} + ...)$), поэтому ряд сходится к непрерывной функции $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \varphi_i(x)$, нигде не дифференцируемой на **R**. Предельную функцию невозможно “наглядно” представить в графическом изображении (далее мы рассмотрим фрактальную трактовку функции Ван дер Вардена).

Поэтому необходим более пристальный анализ перцептивных процессов; ощущения, на которых строится восприятие, не осознаются; константное, то есть правильное отражение свойств предмета, дается лишь в восприятии.

1. Закономерности восприятия математических объектов. Проблема восприятия является коренной проблемой психологической науки. Ею занимались многие видные физиологи, психологи, педагоги XIX и XX века (С. Стивенс, Н. Н. Ланге, Б. Ф. Ломов, А. А. Ухтомский, П. А. Анохин, Г. Гельмгольц, И. М. Сеченов, Б. Г. Ананьев, П. П. Блонский, И. П. Павлов, Д. Н. Узнадзе, А. Н. Леонтьев, В. П. Зинченко, А. В. Запорожец, Б. М. Теплов и др.).

В данном исследовании восприятие будет рассматриваться в широком смысле "как процесс непосредственного информационного взаимодействия организма с объектом (средой), в результате которого происходит целостное отображение объекта (среды) вследствие изменения структуры и динамики определенных подсистем организма" [52]. Объективной основой образа и детерминантом перцептивных и исполнительных действий является объект, поэтому свойства объекта должны быть подвергнуты всестороннему изучению. Важнейшим из них является целостность.

Вторым необходимым элементом в процессе восприятия является субъект восприятия – обучаемый. Применительно к спецификации математических объектов существенной является проблема формирования целостного образа в результате сукцессивного, часто сильно растянутого по времени восприятия сложного целостного математического объекта.

Если обратиться к истории вопроса, то видим, что, изучая процессы пространственного зрительного восприятия, Г. Гельмгольц особенно выделял роль движений. Он придавал движениям более широкий смысл: движение субъекта (как и самих объектов) вызывает постоянные изменения чувственных впечатлений, получаемых от объектов. Вместе с тем повторяющийся опыт обнаруживает устойчивость связей, их признаков, благодаря чему совокупности ощущений и приобретают качество относительно инвариантных образов. Отметив наличие в восприятии элементарных моторных актов таких, как адаптационные рефлексы глаза и т.п., известный психолог Н. Н. Ланге [102] направил свои усилия на исследование чувственных образов тех объектов, которые мы намеренно выделяем в окружающем мире, т.е. на анализ явлений так называемого волевого внимания. Для Ланге волевое внимание есть целевое, целеподчиненное восприятие. Только такое восприятие и дает нам более отчетливое, более конкретное и полное знание воспринимаемого объекта в отличие от знания только "зрачкового", сигнального.

Как показывают экспериментальные данные, перцептивные действия выступают в своей развернутой внешней форме на ранних ступенях онтогенеза, где наиболее четко обнаруживается их структура и роль в формировании образов восприятия. В ходе дальнейшего развития они претерпевают ряд последовательных изменений и сокращений, пока не облекаются в форму мгновенного акта усмотрения объекта, который был описан представителями гештальтпсихологии и ошибочно принимался ими за исходный, генетически первичный. В частности, в действиях, направленных на формирование образа, выделяются операции обнаружения, выделения адекватных задачам информативных признаков, ознакомление с выделенными признаками [1].

Психологические основы зрения. К функциональным образованиям перцептивного процесса относятся сенсорные функции различных модальностей (зрительные, слуховые, тактильные и т.д.), мнемические, психологические, речедвигательные и т.д. К операционным механизмам перцептивных процессов относятся измерительные, соизмерительные, тонически-регуляторные и другие действия, формирующиеся в процессе практического оперирования с вещами и явлениями. Мотивационная сторона перцептивных процессов определяет их направленность, селективность и напряженность [1].

Факторы постепенного усложнения процессов восприятия (перцептивных) объяснялись именно тем, что обобщающе-абстрагирующие функции мышления и обозначающие функции речи строят чувственный образ преимущественно из материалов прошлого опыта. Чем старше ребенок, тем больше в его перцепции апперцепции. Исследование перцептивных процессов различных видов (восприятие предмета или его изображения, пространства и времени, движущихся объектов и т.д.) всегда ориентировано на определенную модальность восприятия в зависимости от анализаторной системы (зрительной, слуховой и т.д.). В специальных случаях применяются комплексные или комбинированные объединения анализаторных систем на решение общей перцептивной задачи (зрительно-слуховой, зрительно-кинестетической и т.д.). Во всех случаях, как общих, так и специальных, исходной моделью и принципиальной схемой перцептивного процесса является зрительный образ. П. П. Блонский высказал предположение, что не существует никакого другого синтеза разнородных впечатлений, кроме зрительного. Зрительный характер представлений в состоянии общей пониженной возбудимости мозга и сохранения в качестве "сторожевого пункта" не зрительной, а слуховой зоны – явление удивительное.

Зрительная система является для человека доминантной не только потому, что она является самым мощным источником информации о внешнем мире, но и потому, что она играет роль внутреннего канала связи между всеми анализаторными системами и является органом – преобразователем сигналов.

Такое необычное для анализаторных систем мозга свойство зрительная система приобретает благодаря сочетанию четырех факторов:

1) **целостного предметного характера образа**, то есть отражению структурного единства воспринимаемых вещей, относимых к определенному пространству окружающей среды;

2) **предметного действия**, посредством которого человек оперирует этими вещами и изменяет их, практически преобразуя их структуру и свойства;

3) **сигнификации воспринимаемых вещей**, благодаря чему обобщается, абстрагируется и сохраняется в качестве констант перцептивное знание;

4) **пространственной организации** симультанного образа.

Зрительная система работает на трех уровнях: сенсорном (ощущения), перцептивном (восприятия), апперцептивном (представления). Способность зрительной системы по-разному видеть один и тот же предмет является необходимой основой для формирования константности восприятия. Н. Н. Ланге открыл закон перцепции, согласно которому процесс восприятия строится как наглядное суждение об объекте.

Одной из основных психофизиологических характеристик человека является константность восприятия, относительная инвариантность образа объекта в изменяющихся условиях наблюдения. Константность восприятия является таким интегральным свойством, которое в равной степени трактуется как закон сохранения информации (Akishige, 1965), так и как проявление закономерной установки (Узнадзе, Натадзе, 1963). Константность восприятия является весьма тонким индикатором индивидуального развития, охватывающим все стороны перцептивных процессов (функциональную, операционную и мотивационную). Перцептивные процессы с их сложной противоречивой структурой являются не только продуктом индивидуального развития, но и одним из его факторов.

Константность восприятия обусловлена практическим взаимодействием живого существа с окружающей его средой и формируется в течение длительного времени. У живого существа в период его индивидуальной жизни вырабатывается способность воспринимать стойкие, действительные свойства объектов (устойчивые связи). Функция перцептивной константности – продуцировать устойчивый, стабильный и константный мир вместо постоянно меняющихся сенсорных впечатлений.

Несмотря на некоторые различия теории перцептивной константности (Дж. Гибсона, К. Огля, Е. Геринга, А. Бланка, Е. Брунсвик и др.), ученые признают влияние апперцепции на константность восприятия, правда, в различной форме и на разные ее компоненты.

В противоположность этим теориям **гештальтпсихология** считает константность имманентным свойством восприятия, при этом перцептивная константность определяется структурой поля восприятия. Для В. Келера константное восприятие (величины, формы, цвета и пр.) по своей природе не отличается от любой оптической иллюзии, обусловленной целостной структурой воспринимаемого зрительного поля. Действительно, влиятельные факторы, по мнению Келлера, – это такие аспекты раздражителя, как конфигурация, близость, сходство, общее направление, симметрия и другие объективные характеристики, подобные этим. Гештальттеория имеет дело с явлениями, которые обнаруживаются в зрительном поле, являющемся, в свою очередь, динамическим распределением энергии, причем его части взаимозависимы из-за их участия в целом. Поле структурировано в зависимости от того, в какой мере внутри него существуют различия по интенсивности или по качеству. В той мере, в какой поле структурировано, оно содержит потенциальную энергию, способную производить перцептивную работу.

Как мнение Коффки о параллельных физиологических процессах, так и призыв Келера к раскрытию полевых мозговых функций основываются на принципе изоморфизма. Буквально это означает “равенство форм”, могущее приобрести точную формулировку математическими методами. Видение белого квадрата сопровождается квадратоподобной областью возбуждения в нейронном поле мозга. Гештальтпсихология утверждает, что сознательно воспринимаемый квадрат должен соответствовать области возбуждения в форме квадрата в каком-либо месте нейронного поля, т.е. если форма из четырех точек воспринимается как “квадрат”, должен иметь место некий подобный квадрату физиологический процесс. Гештальтпсихология не признает локализованных специфических путей, ассоциаций, поскольку такие физиологические явления, исходя из принципа изоморфизма, не имеют соответствующего представительства в сознании.

Полемика главных представителей гештальттеории – М. Вертхаймера, В. Келера и К. Коффки – была направлена своим орудием против ассоциоизма, бихевиоризма. В отличие от некоторых современных психологов, пренебрежительно относящихся к возможностям нейрофизиологии в интерпретации психических явлений, представители раннего гештальтизма усиленно пытались подкрепить свои позиции анализом мозговых механизмов.

Примером критического отношения к гештальттеории могут служить высказывания Дж. Хохберга при рассмотрении двух главных инструментов гештальтизма: феномена фигура – фон и законов организации: а) законы гештальта не детерминированы: волевым усилием можно, например, менять соотношение фигура – фон; б) гештальттеория не дает объяснений различия между восприятием двумерных и трехмерных объектов; в) базовые закономерности восприятия выводятся в гештальтпсихологии на основе эмпирического материала, полученного при представлении плоских изображений, а затем уже переносятся в сферу восприятия объемных тел. При этом вовсе не учитывается, что восприятие рисунка не относится к первичным способностям зрительной системы – для этого требуется ее обучение.

Уже в 1933 году в сводке Г. Хелсона фигурировало 114 законов гештальта. После этого, правда, гештальтпсихологи поспешили резко уменьшить число таких “законов”. К 1942 году Э. Боринг оставил только 14 законов, а Ф. Оллиорт, продолжая процесс редукции, свел теоретический баланс гештальта к шести наиболее общим положениям:

1. понятие формы и изоморфизма;
2. целостность восприятия и примат целого по отношению к частному;
3. принцип силового поля;
4. способность образа к трансформациям и транспозициям;
5. принцип прегнантности (“хорошей формы”);
6. принцип структурности или организации.

В. Метезир возвращается к исходным принципам, сформулированным Вертхаймером в 1923 году, и выделяет 7 факторов гештальта, влияющих на восприятие сложных объектов.

1. **Фактор сходства и наибольшей гологенности**, выражающийся в тенденции к объединению и группировке элементов, сходных по каким-либо параметрам.

2. **Фактор близости**, проявляющийся в том, что близко расположенные элементы легче объединяются в группы, чем отдаленные.

3. **Фактор общей судьбы**, подчеркивающий значимость динамических событий для организации визуальной структуры. Группировка элементов определяется не только семантическим сходством, но и общим характером изменений: однонаправленным перемещением, изменением размера, формы, яркости, цвета и т.д.

4. **Фактор объективной установки**: если у наблюдателя уже сформирована некая структура элементов, то любую новую ее организацию он будет рассматривать как изменение, продолжение, реконструкцию первоначальной.

5. **Фактор вхождения без остатка** (целостность). Примат целостного охвата структурностью даже в ущерб другим факторам.

6. **Фактор переходящих кривых** (“хорошего продолжения”) – наименьшее изменение кривизны линий – своего рода **оптимальность и простота**.

7. **Фактор замкнутости** – замкнутые линии предпочитаются разорванным.

Различные комбинации в объединении перечисленных выше 7 факторов лежат в основе наиболее общего закона гештальта – закона прегнантности.

К параметрам, которые обуславливают индивидуальные различия в процессе восприятия, обычно относят [248]:

– объем восприятия – количество объектов, которое может воспринять человек в течение одной фиксации;

– точность – соответствие возникшего образа особенностям воспринимаемого объекта;

– полнота – степень такого соответствия;

– быстрота – время, необходимое для адекватного восприятия предметов или явлений;

– эмоциональная окрашенность.

Именно эти свойства могут выступать в качестве показателей продуктивности восприятия.

2. Знаково-символическая деятельность. Оперирование математическими объектами представляет собой преимущественно знаково-символическую деятельность, содержание которой составляет использование и преобразование системы знаково-символических средств. Поэтому все основные трудности и проблемы, возникающие в обучении математике, берут свое начало от недостаточного умения “декодировать информацию, представленную знаково-символическими средствами, идентифицировать изображение с реальностью, наличествующей в нем, выделять в моделях закономерности, зафиксированные в них, оперировать моделями, знаково-символическими средствами” [174]. Для учителя математики особенно важно формирование такого общеучебного умения, как взаимопереход от невербальной знаково-символической записи математического объекта (понятия, теоремы, операции, доказательство и т.п.) к вербальному (адекватному) описанию. Более того, в зарубежных исследованиях показывается, что многие трудности в усвоении математических объектов связаны не с содержанием, а с символикой. Обучаемые не понимают схем, не видят за символами реальных математических объектов.

Учебная деятельность по освоению математических знаний предполагает оперирование с системами знаково-символических средств разных модальностей. Это и визуальные средства представления информации: схемы, графики, формулы, карты, чертежи, модели и др., слуховые: аудиоинформация, речь, музыка, имеющие специфическую особенность использования формализованного языка математики. Знаково-символические средства, используемые в учебной деятельности, принципиально различаются между собой по способам кодирования, сложности и четкости алфавита и синтаксиса, причем, даже в рамках одной системы могут функционировать подсистемы с существенными операционными различиями (например, математическая логика и математический анализ). Операционная структура перехода от вербальной знаково-символической системы к формализованной представляет собой сложный взаимопереход и слабо отражена в методической и научной литературе [174]. Тем не менее, она формирует существенное профессионально-важное качество будущего учителя математики, без которого невозможна профессиональная готовность к преподаванию в школе.

В классификации А. М. Коршунова и В. В.Мантатова [94] по функциональным и содержательным основаниям математические знаково-символические средства подразделяются на следующие категории: индексы (знак не отделен от объекта), символы (наглядно-образное выражение абстрактных идей и понятий) и языковые знаки (искусственные и естественные). “Наиболее развитая и социально значимая вербальная знаковая система – естественный язык; выделяется ряд характеристик, позволяющих ставить его первым в ряду знаковых систем (выполнение важнейших функций в деятельности человека – гносеологической, коммуникативной, практической; связывание всех систем знаков, средство их взаимного перехода, использования и развития)” [174].

В классификации Н. Г. Салминой математические знаково-символические средства входят в класс “языковых” (естественные языки и производные от них системы: азбука Морзе, Брайля, дактиль); в подкласс произвольных средств – обозначение терминов (буквенно-цифровая символика, используемая в научном познании и учебной деятельности) и в класс “неязыковых” (не имеющие прямой связи с естественным языком)

– подклассы: пространственные и конические трехмерные, двумерные (макеты, рисунки), пространственные произвольные двумерные, которые используются для выделения существенного в научном познании (схемы, диаграммы, карты и др.).

Психологические исследования видов деятельности со знаково-символическими средствами, относящиеся к развитию и формированию познавательной сферы, берут свое начало от работ Ж. Пиаже и А. Валлона [153]. Наиболее крупными теоретическими достижениями Ж. Пиаже являются учения об операторной инвариантности, символической функции, взаимодействии и равновесии, интериоризации действия. Проблема формирования символической функции обсуждается Пиаже на ограниченном возрастном периоде, почти полностью отсутствует отношение к инструментам представления знаний: схемам, диаграммам, рисункам, таблицам, математической символике. Ж. Пиаже не сделал никаких дидактических рекомендаций относительно логики использования различных учебных средств. В дальнейшем Г. Эбли, Ж. Марке, Ж. Бидо и др. показали, что успешность решения задач определяется уровнем операционного развития, хотя характер предъявляемого материала существенен и не связан исключительно с уровнем операционального развития. Основной вывод, формулируемый Ж. Марке, – в обучении должна быть предусмотрена адекватность предъявляемого материала уровню операционного развития.

Данные, полученные в теории поэтапного формирования умственных действий П. Я. Гальперина [50], и результаты Н. Г. Салминой [174] позволяют сделать следующие выводы: операциональное развитие влияет на символическое, но не определяет его. Работа обучаемых с использованием формально-логического аппарата не ведет к повышению уровня обобщения, главное – важна адекватность деятельности формируемым знаниям. **Обобщенность, гибкость оперирования знаниями зависит не только от уровня операционального развития, но и от предметно-специфических знаний, которые определяются структурой и способами формирования знаний.**

Относительно теории Брунера о роли речи в познавательном развитии Н. Г. Салмина считает, что, “соглашаясь в целом с неравномерностью развития различных знаково-символических систем, едва ли можно говорить о такой прямолинейной последовательности в их освоении (действенная, образная, символическая). Совершенно очевидно, что существует более сложная динамика развития этих способов и их неравномерность, поскольку даже внутри отдельных видов (визуальные, вербальные и др.) можно выделить системы разного уровня сложности" [174]. Начало постановки проблемы знака, оперирования знаково-символическими средствами, символической (знаковой) функции связывается с именем Л. С. Выготского [47].

Наиболее распространенный термин, характеризующий способ оперирования знаково-символическими средствами в педагогической и психологической литературе, – моделирование.

В философии моделирование определяется как метод познания, при котором изучается искусственная система. В психологии моделирование выступает как действие, одно из учебных действий, входящих в состав учебной деятельности [57].

В работах Н. Г. Салминой [175] моделирование понимается как деятельность, имеющая многокомпонентную структуру. Понятие "деятельность" рассматривается в философии как категория, имеющая методическое значение. В "Философском энциклопедическом словаре" оно определяется как "специфически человеческая форма активного отношения к окружающему миру, содержание которого составляет его целесообразное изменение и преобразование". Оперирование знаково-символическими средствами имеет общую структуру и способы функционирования, что позволило Н. Г. Салминой отнести его к особому виду деятельности (знаково-символическому) и построить классификацию видов знаково-символической деятельности. В качестве критериев, лежащих в основе классификации, были взяты:

– функции средств в деятельности;

– характер связей объекта, выступающих в качестве замещаемого;

– план деятельности (символический или реальный);

– функция формы по отношению к содержанию;

– вид обозначающих средств (форма);

– устойчивость – ситуативность;

– индивидуализированность – коллективность.

Это позволило выделить следующие виды:

– **моделирование** – знаково-символическая деятельность, заключающаяся в получении объективно новой информации (познавательная функция) за счет оперирования знаково-символическими средствами, в которых представлены структурные, функциональные, генетические связи (на уровне сущности);

– **кодирование** – знаково-символическая деятельность по передаче и принятию сообщения (коммуникативная функция), использующая любые способы работы (в обоих планах, в раздельных);

– **схематизация** – знаково-символическая деятельность, целью которой является ориентировка в реальности (структурирование, выделение связей), осуществляющаяся одновременно в двух планах с постоянным, поэлементным соотнесением символического и реального планов;

– **замещение** – знаково-символическая деятельность, целью которой является функциональное воспроизведение реальности, использующее любые способы работы.

Кодирование в учебной деятельности предполагает умение воспроизвести содержание в знаково-символической форме. Типичный пример кодирования в математическом анализе – логическая запись определения или теоремы. Например, определение предела функции f в точке $x = a$ следующее: число L называется пределом функции f в точке $x = a$ (предельной), если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, зависящее от ε, такое, что для всех $x \in D(f)$ с условием $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - L| < \varepsilon$. Эта вербальная запись уже содержит элементы кодирования предыдущих знаний (меньше $<$, принадлежит $\in$ и т.д.) в форме знака или символа, но, определяя новое знание (понятие предела функции), мы обязаны идентифицировать его внутренним закономерностям оперирования с математическими объектами с целью присоединения нового знания к формализованному аппарату математики. По законам математической логики кодирование будет таким:

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta > 0 \ \forall x \in D(f) \ (0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Если в психологических исследованиях [174] кодирование совершается для того, чтобы в дальнейшем декодировать информацию, то в математике полученная кодированная запись получает развитие и использование внутри присоединенного формализованного аппарата и даже дает новую информацию. Так, в нашем примере построим по законам математической логики отрицание определения:

$$\exists\varepsilon > 0 \ \forall\delta > 0 \ \exists x \in D(f) \ (0 < |x - a| < \delta \ \wedge \ |f(x) - L| \geq \varepsilon).$$

Теперь декодируем полученную логическую запись: число L не является пределом функции f в точке $x = a$ (предельной), если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ как только точка $x \in D(f)$ удовлетворяет неравенству $0 < |x - a| < \delta$ выполнено неравенство $|f(x) - L| \geq \varepsilon$.

Этот взаимопереход показывает не только специфику знаково-символической деятельности в математике, но и является необходимым компонентом комплекса профессионально важных качеств будущего учителя математики.

Другой вид знаково-символической деятельности – моделирование – И. Б. Новик [142] характеризует как опосредованное практическое или теоретическое исследование объекта, при котором непосредственно изучается не интересующий нас объект, а вспомогательная искусственная или естественная система, находящаяся в некотором объективном соответствии с познаваемым объектом, способная его замещать в определенном отношении и дающая в конечном итоге информацию о самом моделируемом объекте.

Моделирование своим объектом имеет модели. В исследовании Н. Г. Салминой [174] разводятся понятия схемы и модели в учебной деятельности. Если модель не предполагает исследовательской функции, а применяется для иллюстрации каких-то положений или выступает как средство усвоения готового материала, то это схема, а вид знаково-символической деятельности – схематизация.

Представление (организация) знаний связано со знаково-символической деятельностью и характеризуется структурированностью, связностью и активностью представления. Виды знаково-символической деятельности порождают типы моделей представления знаний, принятые в инженерии знаний и решении проблем искусственного интеллекта [165]: логические, реляционные, семантические сети, продукционные, фреймовые.

Логические модели представляют математические знания посредством исчисления предикатов и адекватных “иерархических деревьев”. Достоинством знаково-символических средств, использующих буквенно-цифровую символику, являются фиксированность алфавита и существование мощных процедур логического вывода. Дерево – это плоский, связный, ациклический граф. Каждый граф, не содержащий циклов, называется лесом. Таким образом, компонентами леса являются деревья. В вершинах графа обычно располагаются учебные элементы (понятия, теоремы, алгоритмы, математические методы, спирали фундирования и т.п.), ребра обозначают отношение между учебными элементами. Таким образом, можно построить логическую структуру понятий или теорем учебного предмета. Однако здесь прямые аналогии инженерии знаний и представления знаний в мышлении человека заканчиваются. Глубина и ширина поиска, процедуры поиска оптимального пути вступают в противоречие с физиологическими и психологическими возможностями восприятия (миллеровские числа, законы гештальта, психомоторика и т.п.). Поэтому, например, в логической структуре понятий должно быть 7 ± 2 базовых понятий (вершин) и 3–4 уровня глубины дерева, с теми же миллеровскими числами в каждой промежуточной вершине. Если это не выполнимо в рамках данного учебного материала, то необходима его глобальная структуризация.

Реляционные модели в основном представляются разнообразными таблицами. В математике таблицы являются не только средством представления знаний, но и учебными элементами, например, матрицы в алгебре, таблицы производных и интегралов в математическом анализе, электронные таблицы в информатике и т.д. Таблицы легко воспринимаются, структура их доступна, данные группируются компактно.

Семантическая модель представляет собой ориентированный граф, в котором вершины соответствуют определенным объектам или понятиям, а дуги отражают отношения между вершинами. Семантическая модель допускает циклы, разнотипность отношений между вершинами, разнообразие видов информации о математических объектах в вершинах: это могут быть блок-схема изучения темы или доказательства теоремы, структурная модель полноты изучения понятия, спирали фундирования и мотивации базового школьного знания и т.д. Требования к построению семантических сетей коррелируют с основными закономерностями восприятия знаково-символических систем.

Продукционная модель фиксирует процедуру математических действий при решении определенных задач. Например, схема исследования функции f действительного переменного выглядит следующим образом:

1. Найти область определения $D(f)$ и область значений $R(f)$ функции, точки пересечения с координатными осями, особые точки и пределы функции f на бесконечности и в особых точках.
2. Найти асимптоты f и построить эскиз графика.
3. Найти первую производную функции f', стационарные и критические точки. Найти промежутки монотонности f, экстремальные точки и значения f в них.
4. Найти вторую производную функции f'', точки перегиба функции f. Найти промежутки выпуклости функции вверх и вниз.
5. Построить график функции.

Таким образом, данная процедура состоит из 5 правил (продукций).

По мере того, как математические и дидактические объекты усложняются, представления знаний в виде сетей уступают место **фреймовым моделям**. Основатель теории фреймов М. Минский дает следующее определение: “Фрейм (рамка) – это единица представления знаний, запомненная в прошлом, детали которой при необходимости могут быть изменены согласно текущей ситуации” [130]. В тех случаях, когда многое можно сказать о содержимом вершины сети, целесообразен переход к фреймовому представлению, содержащему ячейки (слоты) и имена ячеек. Фрейм может иметь многоуровневую структуру. Наличие имен фреймов и имен слотов обеспечивает возможность внутренней интерпретируемости знаний, хранимых во фреймах, а также активизации фрейма за счет процедурных слотов. Таким образом, фреймовые модели удовлетворяют всем четырем основным требованиям к знаниям (внутренняя интерпретируемость, структурированность, связность и активность [165]).

Следует иметь в виду, что типология моделей представления знаний возможна в реализации любого вида знаково-символической деятельности.

3. Компоненты целостности восприятия математических объектов. Целостность – объективное свойство предметов внешнего мира. Формирование целостного представления является большой научной проблемой, требует серьезной работы по фильтрации, систематизации, преобразованию и обобщению накопленной информации. Познание целостного объекта является сложным процессом.

В качестве некоторых задач познания целого В. Г. Афанасьев [10] выделяет раскрытие действительного источника и начало его возникновения, его состава, то есть количественной и качественной характеристик образующих компонентов, его структуры, то есть характера взаимосвязи его компонентов и понимание целого как самодвижущегося, саморазвивающегося образования; связи данного целого с большим целым, интегративных качеств, являющихся результатом его внутренних и внешних взаимосвязей; тенденций развития целого.

В зависимости от уровня знаний и задач, которые решает исследователь, целое может рассматриваться как элемент (далее неразложимый) или как система элементов.

Принцип целостности направляет процессы гуманизации и фундаментализации образования. Целостность и является тем основным звеном, которое связывает различные знания, впечатления, волевые устремления в единое целое, служит не только ориентиром, но и определяющим качественным критерием эффективности процесса обучения.

Понятие целостности относится к числу таких понятий, роль которых в научном познании не может быть исчерпана: каждый новый этап в развитии науки приводит к углублению и конкретизации представлений о целостных объектах и в то же время к необходимости обращаться к проблеме целостности уже в иных аспектах и на новом уровне понимания.

Эта проблема и способы ее решения отражают многие характерные особенности человеческого познания. И. В. Блауберг и Б. Г. Юдин [25] различают представления о целостности как неотъемлемой черте научного познания; понятие целостности, которое вырабатывается в специальных науках; целостность – инструмент исследования в познавательной деятельности.

На первое место в наборе характеристик целостных объектов различного рода они относят свойство **интегративности**: целостность характеризуется новыми качествами и свойствами, не присущими отдельным частям (элементам), но возникающими в результате их взаимодействия в определенной системе связей.

Объяснение целостности некоторого объекта должно вскрыть те его внутренние закономерности, которыми обусловлено его качественное своеобразие. С помощью представления о целостности фиксируется исходная ситуация исследования объекта и познавательный процесс непосредственно направлен на целостный объект.

Знание и учет закономерностей и свойств целостных объектов и их восприятия играют большую роль в обеспечении эффективности повышения качества результатов различных видов деятельности. Эти закономерности необходимо учитывать при организации объектов и условий восприятия, в процессах обучения и организации познания.

С проблемами обучения связано много вопросов целостного представления информации, например, представление материала обучения в целостной форме; организация процесса передачи информации; представление результата обучения – совокупности знаний, умений и навыков как целостной системы. Процесс обучения развертывает систему знаний в линейную последовательность, которая растянута во времени. С учетом этой закономерности возникает необходимость строить процесс обучения так, чтобы развертка системы знаний вновь была свернута уже в памяти обучающегося.

В практической деятельности людей, в искусстве, науке, процессе обучения широко используются отображения целостных объектов (чертеж, рисунок, текст, модель и т.д.). Отображения можно рассматривать двояко: как результат деятельности и как средство достижения цели. Особый класс отображений представляют концептуальные. Объектами для таких отображений являются научные понятия, научные дисциплины, данные науки в целом. С этим классом отображений в большей степени связан процесс обучения математике в вузе.

Формирование целостного представления о сложном математическом объекте происходит на основе большого числа вначале слабо организованных сведений. Их организация, структурирование происходят путем анализа и синтеза имеющихся данных. На этом этапе происходит определение частей целого, выявление отношений и связей между ними.

Процесс восприятия математического объекта (понятия, теоремы, доказательства, алгоритма, модели, структуры, пространственной формы и т.п.) в процессе обучения обычно носит развернутый характер: анализируется большое количество самых различных признаков предмета.

По мере развития процесса восприятия (формирование понятия, усвоение знания и т.п.) количество этих признаков сокращается, остаются только самые значимые из них, существенные, которые впоследствии выполняют сигнальную функцию. Происходит формирование так называемых единиц восприятия – сенсорных эталонов, идеальных образов, хранящихся в памяти, с которыми человек сравнивает то, что воспринимает в данный момент. Важно, чтобы они были адекватны особенностям объекта.

Целостность – одно из ведущих свойств восприятия, позволяющее получить целостный образ объекта во всем многообразии и соотношении его свойств и сторон.

На перцептивном уровне познания происходит выделение частей объекта, определение признаков частей, отношения между ними, фиксирование локальных структур, синтез полиструктуры объекта и определение тех интегральных характеристик, которые находятся на основе предварительного анализа объекта. Все эти компоненты, фиксированные с разной степенью полноты, могут быть составляющими целостного образа.

Компонент целостности восприятия математических объектов предполагает чувственно воспринимаемую (в основном зрительными анализаторами) знаковую математическую модель основных существенных признаков и структуры внутренних и внешних взаимосвязей объекта, при этом необходимость внешних взаимосвязей указывает на общую направленность компонента математического объекта, подчеркивая его целостность.

Моделирование позволяет организовать формирование полноценных умственных действий студентов по III типу ориентировки П. Я. Гальперина и Н. Ф. Талызиной [51], когда предлагается метод анализа математического объекта для самостоятельного составления полной ориентировочной основы действий.

Существенным является то, что по А. Н. Леонтьеву [104] "...актуально сознается только то содержание, которое является предметом целенаправленной деятельности студента, т.е. занимает структурное место непосредственно цели внутреннего или внешнего действия в системе той или иной деятельности".

Таким образом, для того, чтобы студенты усвоили математические понятия и целостно овладели ими, необходимо ввести эту целостность в виде знаковой математической модели и сделать ее усвоение целью действий студентов в процессе обучения математике.

Все сказанное выше позволяет сформулировать **признаки целостного математического объекта**:

– наличие основных существенных компонентов объекта;
– наличие структуры внутренних взаимосвязей;
– наличие структуры внешних взаимосвязей;
– интегративность;
– функциональность;
– обобщенность.

При этом полнота, содержание и объем признаков определяются целеполаганием и местом математического объекта в системе математических объектов и теорий.

В процессе восприятия происходит взаимодействие информации, хранящейся в памяти, и свежих следов, полученных в данном процессе восприятия от того же воспринимаемого объекта. Индивидуальный опыт, зафиксированный в памяти, оказывает огромное влияние на процесс и результат восприятия.

Существенно важным для теории обучения и научной организации учебного процесса является вопрос об оптимизации объема восприятия и движения информации. Без необходимого, обоснованного распределения и направления не соответствующий объему поток информации может привести к тому, что его содержание не будет оптимально переработано и превращено в знания студентов. Оптимизация движения информации и определения ее объема требует связи с формой и средствами ее выражения.

В учебном процессе большое значение имеет выражение содержания информации через определенную знаковую систему. Оптимальность кодового применения информации характеризуется необходимой четкостью выражения содержания при достаточно высокой информативной емкости сообщения. Сообщаемая студенту информация может превратиться в знания, а может – нет. Зависит это прежде всего от того, насколько дидактически подготовлены условия такого превращения.

Можно перечислить некоторые положения, определяющие условия оптимальной передачи учебной информации. Так, сообщение информации без надлежащей мотивировки, возбуждение интереса к ней даже при высоком ее качественном содержании не обеспечивают желаемой эффективности обучения: студент может оказаться неготовым к восприятию нужного материала.

Также необходимыми являются четкое определение цели сообщения нового материала; обоснование формы и средств сообщения; оценка возможностей восприятия информации по ее объему, доступности содержания; дидактическая и психологическая подготовка студентов к восприятию информации для переработки ее в знания.

Степень восприятия учебной информации пропорциональна степени автоматизма применения ее кодирующих средств. Учебная информация передается при помощи условных сигналов, расположенных в определенной последовательности. Все параметры и значения этих сигналов находятся в изоморфном соответствии с содержанием и степенью абстрагирования информации. Порядок и форма установления такого соответствия и представляют собой кодирование.

Учебный процесс связан не только с кодированием, но и перекодированием, которое является фактором опосредованной переоценки содержания, значения, ценности информации, а также средством перехода к более высокому уровню познания.

Главной стороной учебной информации является содержательная, семантическая сторона, оценка конкретных целей и задач данного конкретного раздела предмета изучения. Эта сторона информации в процессе обучения всегда требует установления связи и отношений между формой кодирования, мыслями, действиями. За каждым символом информации должно стоять его реальное значение, смысл познания.

З. И. Калмыкова [81] отмечает, что закреплению в долговременной памяти относительно небольшого количества информации, включающей в себя наиболее общее и значимое для последующего оперирования содержанием вновь усваиваемых знаний, способствует “наложение” этой информации на наглядно представленные “опоры” – условные знаки, символы, отражающие не только отдельные элементы этих знаний, но и взаимосвязь между ними.

Математические представления обучающихся возникают в учебном процессе не как формальные копии исходного носителя информации, а как некие модели, трансформирующиеся в определенные психические образы. Опираясь на общее описание понятия “образ” в психологии, психический образ, возникающий в сознании обучающегося математике, можно трактовать как субъективный феномен, формирующийся в процессе предметно-практической, чувственной и мыслительной активности и представляющий собой результат целостного, интегрального отражения математических знаний.

В процессе обучения математике психические образы выполняют различные функции: уточнения, систематизации, обобщения воспринимаемой информации, создания целостной многоуровневой системы представлений о предмете изучения.

С учетом доминанты зрительного анализатора в восприятии человеком учебной информации можно утверждать, что образы, основанные на наглядности, могут достаточно эффективно влиять на формирование представлений обучаемых о различных математических объектах, в том числе довольно абстрактных, далеких от привычных и обыденных.

Поскольку знание закономерностей организации целого и его восприятия является необходимым условием успеха во многих видах деятельности, можно высказать утверждение о том, что знание этих закономерностей должно стать необходимым компонентом общей культуры любого человека, и способность воспринимать целое необходимо включить в профессиональные качества.

1.4. Концепция наглядного моделирования в обучении математике как фактор целостного педагогического процесса подготовки учителя математики

1.4.1. История развития принципа наглядности в обучении

Изменения в структуре высшего педагогического образования России, появление средних школ разного профиля: лицеев, гимназий, колледжей и т.п., демократизация общественной жизни имеют в своей основе коренной поворот к гуманистическим позициям функционирования современного образования. В немалой степени эта тенденция коснулась содержания математического образования в среднем и высшем звене, равно как и методов обучения математике. Индивидуализация обучения, дифференцированный подход, использование новейших исследований в психологии и физиологии человека для совершенствования процесса обучения, нахождение оптимальных условий для усвоения сложного математического содержания стали неотъемлемым атрибутом творческого педагогического процесса. Учащиеся классов с профильным изучением различных дисциплин (математического, химико-биологического, гуманитарного и других циклов) получили право и возможность, овладев определенным уровнем общеобразовательной подготовки, уделить большее внимание тем направлениям, которые отвечают их склонностям и интересам. В каждой школе, профильном классе преподавание математики занимает определенное место, однако содержание и методы изложения материала существенно отличаются: учитывается специфика направления, индивидуальные особенности детей, уровень подготовленности учительских кадров.

Такому подходу чужды формализм, начетничество, игнорирование или недостаточное внимание к субъекту восприятия сущности математики. Со времен великих педагогов (Я. А. Коменский, Г. Песталоцци, К. Д. Ушинский и др.) педагогическая мысль стремилась к такой организации учебного процесса, когда достигается сознательное понимание смысла (сути) и содержания математических понятий. Один из таких путей – сделать процесс обучения математике наглядным, так как именно наглядное обучение позволяет учителю овладеть активными методами обучения и воспитания, способствует обеспечению принципов научности и доступности изложения материала, улучшению обшекультурной подготовки учащихся, позволяет обеспечить разностороннее и полное формирование понятий, поддерживать интерес учащихся к предмету, к учебе, приводит к более высокому уровню развития математической культуры, в том числе математического языка и логического мышления, эстетического восприятия, творческого отношения к делу.

Наглядность, вероятно, появилась вместе с возникновением человеческого общества, вместе с потребностью передачи информации об отсутствующем на данный момент предмете или явлении. Об этом говорят дошедшие до нас наскальные рисунки. Наглядное же обучение возникло, по всей видимости, вместе с первыми школами. История не сохранила имени того человека, который первым начал использовать элементы наглядного обучения, нет точного описания их применения в школьной практике. Люди стали применять наглядное обучение до изобретения письменности. В школах Древнего Египта, Древнего Рима, Древней Греции оно нашло широкое применение.

Развитие устной и письменной речи, а с ними развитие абстрактного мышления, положили начало распространению методов наглядного обучения. Изменился стиль написания книг, он стал более выразительным, эмоциональным. В рукописных и печатных книгах появились рисунки. У Томаса Мора, например, в его книге “Утопия” на острове Утопия идет обучение детей по книгам с картинками.

Однако самого термина – **наглядное обучение** – еще не было, как не было и строгого теоретического обоснования такого обучения. Применение наглядных пособий основывалось на интуитивных, чисто зрительных представлениях.

Основоположником принципа наглядности, давшим его обоснование, мы считаем чешского педагога Яна Амоса Коменского, (1592–1670), который дал определение наглядности, называя его “золотым правилом дидактики”. Именно оно послужило началом одного из важнейших путей развития школы, явилось первой ступенью для многих педагогических исследований.

Я. А. Коменский понимал наглядность как чувственный компонент, который позволяет с помощью разных органов чувств получить более полную, достоверную информацию о том объекте или явлении, которые воспринимаются человеком. “... все, что только можно представить для восприятия чувствами, а именно: видимое – для восприятия зрением, слышимое – слухом, запахи – обонянием, что можно вкусить – вкусом, доступное осязанию – путем осязания. Если какие-либо предметы можно воспринимать несколькими чувствами, пусть они сразу схватываются несколькими чувствами” [93. С. 384].

Чешский педагог рекомендовал начинать учение с непосредственного восприятия предмета в натуре, а если такового предмета не было, то его можно было бы заменить картиной или копией его изображения. Все вышесказанное относилось и к явлениям. Я. А. Коменский учил, что человек должен получать знания путем собственных наблюдений, а не с чужих слов.

Главное место в вопросе наглядности Я. А. Коменский отводил зрению. Его книга “Мир чувственных вещей в картинках” была первым учебником, написанным с учетом принципа наглядности. Этой книгой долго пользовались при преподавании языка.

Таким образом, мы видим, что Я. А. Коменский связывал наглядность с чувственным познанием. Наблюдение он считал основой получения всякого знания.

И. Г. Песталоцци (1746–1827) наблюдение считал лишь первым шагом для развития абстрактного мышления. Он дал более глубокое обоснование наглядности, продолжил изучение этой проблемы. “Когда я в настоящее время оглядываюсь назад и спрашиваю себя: что же собственно я сделал для обучения человечества, то нахожу следующее: я прочно установил высший основной принцип наглядности абсолютной основой всякого познания" [152].

Говоря о непосредственном восприятии органами чувств окружающего мира, И. Г. Песталоцци писал: "Моей существенной исходной точкой зрения является следующая: созерцание (чувственное восприятие) человеком самой природы является единственной основой человеческого познания. Все, что следует затем, является просто результатом или абстракцией от этого чувственного восприятия" [152. С. 49].

Швейцарский педагог-демократ считал наглядность средством развития умственных способностей детей, средством развития речи. По его мнению, наблюдение включает в себя три основных этапа:

– сколько предметов находится перед ребенком, разных предметов;

– какова их форма;

– как называются эти предметы.

И. Г. Песталоцци считал, что важность наглядного обучения в том, что оно помогает развивать мышление и речь, позволяет постепенно перейти от части к целому, а это, по его мнению, и есть суть обучения.

Учение Я. А. Коменского развивают германские педагоги И. Ф. Гербарт (1776–1841), Ф. Дистервег (1790–1886). Они разрабатывают методику наглядного обучения, требования к использованию наглядного материала на уроке учителем:

– не следует слишком долго демонстрировать предмет, то есть учитель должен очень тщательно продумать вопрос о длительности использования наглядного материала;

– демонстрация одного и того же предмета утомляет ученика, т.е. сформулировано требование применения разных видов наглядности на уроке;

– несвоевременные паузы, посторонние предметы "нарушают свободное течение апперцептивного механизма и разрывают ряды представлений" (Гербарт), т.е. при использовании наглядного материала следует помнить о механизме восприятия, о целостности, целесообразности и методике применения наглядных средств;

– идти постепенно "от близкого к далекому, от легкого к более трудному" (Ф. Дистервег), идти постепенно от простого к сложному, подходить к наглядному обучению творчески, не применять "золотое правило дидактики" формально.

И. Гербарт считал, что перед непосредственным изучением какого-либо объекта или явления, перед непосредственным наблюдением за ним учеников следует ознакомить с предметом наблюдения, показать, что следует выявить, т.е. прибегать к апперцепции. Здесь мы видим, что он подошел вплотную к вопросу целевой установки, к созданию определенного фона, на котором строится наглядное обучение.

Ф. Фребель (1782–1852) рассматривал наглядность как созерцание и активность. Через созерцание при помощи наглядных средств происходит образование представлений и понятий, которые затем должны найти свое выражение через активность, через определенный вид деятельности. “Что ребенок созерцает, пусть он это самое и делает своими руками” [235], построит или вылепит. Ф.Фребель занимался вопросами дошкольного воспитания, но его заслуга состоит в том, что он выделил активный компонент, компонент творчества в вопросе наглядного обучения. Говоря о наглядном обучении, все педагоги того времени имели в виду непосредственное восприятие органами чувств окружающего мира, разрабатывали методику наглядного обучения, хотя прямо, открыто вопрос о взаимосвязи определения наглядного обучения, категории цели и деятельности не ставился.

Материалистическое обоснование принципа наглядности дал великий русский педагог К. Д. Ушинский (1824–1870), что послужило большим шагом вперед в изучении этой проблемы. Он считал, что наглядность нельзя связывать только со зрительными ощущениями. “Дитя мыслит формами, красками, звуками, ощущениями”. К. Д. Ушинский сформулировал определение наглядного обучения как учения, построенного на конкретных образах, непосредственно воспринимаемых ребенком, независимо от того, воспринимаются они в процессе обучения под руководством учителя или в результате самостоятельных наблюдений ребенка. Живую и образную речь он считал одним из особых и важнейших видов наглядности. В процессе обучения учитель может оживить свой рассказ “во-первых, наглядностью, показывая детям сам предмет с тем, чтобы они, глядя на него, могли не только припомнить прочитанное, но и дополнить его из непосредственного созерцания; во-вторых, разнообразием и живостью вопросов” [232].

Для К. Д. Ушинского наглядность – важнейший дидактический принцип, на котором основывается обучение, обязательно присутствующий в методах и приемах обучения.

Константин Дмитриевич отводил большую роль наглядности как средству воспитания мышления. Он считал, что упражнять ребенка в логическом материале можно только на наглядном конкретном материале. Предмет должен сначала непосредственно отражаться в душе ребенка, а потом под руководством учителя полученные ощущения формируют понятие, а то, в свою очередь, рождает мысль, которая выражается посредством слова. Наглядное обучение развивает наблюдательность, а это способствует "развитию ума".

Великий русский педагог правильно понимал роль и назначение наглядного обучения, выдвигая идею внешней опоры. "Учите ребенка каким-нибудь пяти незнакомым словам, и он будет долго и напрасно мучиться над ними; но свяжите с картинками 20 таких слов – и ребенок усвоит их на лету. Вы объясняете ребенку очень простую мысль, и он вас не понимает; вы объясняете тому же ребенку сложную картину, и он вас понимает быстро" [232].

У Константина Дмитриевича Ушинского мы встречаем деятельностный элемент в подходе к наглядному обучению. Он писал: "Кто не замечал над собой, что в памяти нашей сохраняются с особой точностью те образы, которые мы восприняли сами посредством созерцания, и что к такой врезавшейся в нас картине мы легко и прочно привязываем даже отвлеченные идеи, которые без того изгладились бы быстро" [232]. Из этих слов следует, что в результате внутренних действий с предметом происходит усвоение понятий.

В апреле 1860 г. в объяснительной записке о преобразовании учебных курсов Смольного института благородных девиц К. Д. Ушинский дал убедительную критику существовавшей тогда программы по арифметике и предложил свою программу по этому предмету. Он указывал, что преподавание распределено в обратном порядке. Сначала изучались отвлеченные числа, потом все именованные, дроби, и, наконец, наглядные понятия об измерениях. К. Д. Ушинский предложил начинать обучение наглядными понятиями об измерениях, "именно потому, что они наглядные. ...Занявшись изучением геометрических форм, учитель арифметики оживит свое преподавание и может воспользоваться измерениями, чтобы самой арифметике придать наглядность и живость. Именованными числами следует заниматься прежде, чем отвлеченными, и изучение действий над дробными величинами вовсе не следует отделять от целых чисел. Следует начать с того, чтобы познакомить детей с мерами и весами и дать им самим возможность мерить, взвешивать и считать" [232].

Мы видим, что К. Д. Ушинский призывал идти от конкретного к абстрактному, от действия (практики) к теоретическому обобщению.

К. Д. Ушинский глубоко понимал значение наглядного обучения, так как оно способствует развитию умственных способностей, доступности изложения материала, активности и самостоятельности в учебной деятельности, систематизации полученных знаний, эмоциональному восприятию материала.

В вопросах наглядности К. Д. Ушинский стоял на позициях сенсуализма: свойство наглядности приписывал чувственно воспринимаемым предметам и явлениям. Заслуга его состоит в том, что он развил учение о наглядности как средстве развития мышления, к принципу наглядности подходил не формально, разработал новые приемы работы с наглядным материалом, живую образную речь считал средством наглядности.

Н. Ф. Бунаков (1837–1904) разрабатывал методику наглядного обучения в младших классах. Он проводил специальные уроки наглядного обучения, связывая их с изучением родного языка. Эти наглядные уроки проводились не только в школе, но и во время экскурсий и прогулок в лес, в поле, город. Н. Ф. Бунаков разработал интересную тематику наглядных бесед для начальной школы, где осуществлялся принцип преемственности. Большую роль он придавал написанию сочинений, основанных на материале, взятом из наблюдений, из жизни. Позже Н. Ф. Бунаков отказался от специальных уроков наглядного обучения, придя к выводу, что принцип наглядности должен присутствовать на каждом уроке. Он большое значение придавал изготовлению наглядных пособий самими учащимися, работы в саду и на огороде считал необходимым условием для накопления наглядного материала для бесед и упражнений.

Н. Ф. Бунаков наглядность считал средством связи обучения с реальной жизнью, средством приобретения жизненно необходимых знаний, связывал понятие наглядности с элементами деятельности.

П. Ф. Каптерев (1849–1922) писал: "Если обучение должно основываться на естественном ходе развития человека, то оно должно начинать с того же, с чего начинает и природа – пробуждать чувственный разум человека и постепенно переводить его к отвлечениям. Наглядное обучение есть единственно правильный и естественный метод обучения, вполне отвечающий ходу развития отдельных личностей." [85. С. 297] Поддерживая взгляды К. Д. Ушинского, П. Ф. Каптерев считал, что наглядное обучение идет от конкретного к отвлеченному, абстрактному наглядность не присуща. Он впервые ставит проблему того, что считать наглядным обучением. П. Ф. Каптерев наглядное обучение связывает с элементарным и с деятельностным. Изучаемый материал разлагается на элементы, которые потом при последовательном изучении слагаются в сочетания, затем в сложные образования. Как и Фребель, Каптерев считал, что обучение тогда наглядно, когда оно включает в себя действие, т.е. такое обучение наглядно, при котором ученик может представить усваиваемый материал в виде модели, рисунка, аппликации и т.д.

П. Ф. Каптерев рассматривал обучение как взаимосвязанную деятельность учителя и ученика: с одной стороны – деятельность учителя, с другой – внутренняя деятельность ученика, однако четкого обоснования наглядного обучения с этих позиций не дал.

В. П. Вахтеров (1853–1924) считал наглядным обучением такое, которое включает в себя элемент моторной деятельности человека, именно поэтому много времени уделял рисованию, лепке, аппликации, а это повлекло за собой сокращение объема изучаемого материала и сыграло отрицательную роль в обучении. Термин “наглядное обучение” он предлагал заменить на “предметное обучение”, которое было рассчитано на опору, на все внешние чувства. “Дети никогда не довольствуются одним зрением. Им надо ощупать предмет, надо постучать, чтобы узнать, как он звучит, надо поднять его, чтобы узнать, как он тяжел, надо подбросить его, чтобы узнать, разобьется ли он... Поэтому слова “наглядное обучение” неверно выражают то, что так обыкновенно называют. Вернее будет сказать “предметный метод обучения” [38. С. 75].

Таким образом, в рассмотренных работах наглядное обучение связывалось с конкретно воспринимаемым объектом или явлением, действовавшим на органы чувств.

Заслуга ученых-педагогов того времени состояла в том, что они поставили проблему наглядного обучения, обосновали значение наглядного обучения (К. Д. Ушинский), разрабатывали методику его применения в школе, поставили вопрос о связи деятельности с наглядным обучением (включения действия в обучение).

Однако они считали, что свойство наглядности присуще только конкретному, а абстрактные понятия нельзя связывать с понятием наглядности. Разрабатываемая методика применения принципа наглядности касалась в основном начальной школы, уроков родного языка, чтения, не был выявлен компонентный состав наглядного обучения.

1.4.2. Современные подходы к понятию наглядного обучения

В настоящее время в психолого-педагогической и методической литературе наблюдается разнообразие подходов и трактовок наглядного обучения, наглядности, видов наглядности, классификаций средств наглядности.

“В научной литературе и школьной практике слово “наглядность” употребляется в трех смыслах. Во-первых, оно означает некоторый объект (средство наглядности), во-вторых, некоторое свойство (наглядность реальных предметов, явлений, мышления), в-третьих, определенную деятельность человека (восприятие средств наглядности, использование их)” [127. С. 4]. В связи с многозначностью термина встречаем разные его определения.

В Педагогическом словаре [151] дается следующее определение: “наглядность – дидактический принцип, согласно которому обучение строится на конкретных образах, непосредственно воспринимаемых учащимися”.

Э. Г. Мингазов отмечает, что наглядность не является узкодидактической категорией, она имеет общегносеологическое значение, но в данный момент нет единого определения наглядности с гносеологических позиций. Он предлагает рассматривать две ступени наглядности: конкретную и абстрактную. Под конкретной наглядностью понимается наглядность на уровне явления; она заключается в живом созерцании реальных объектов, их опосредованном проявлении и в выражении сущности в явлении, общего в отдельном, абстрактного в конкретном. Наглядность на уровне сущности, общего – это уже абстрактная наглядность; когда речь идет о ней, то уже нет обращения к конкретному, отдельному. Она присуща не реальному объекту, а логическому знанию, характеризует его форму выражения и выражается в таком знании, при котором легко схватываются главные его особенности. Абстрактная и конкретная наглядности имеют различные гносеологические роли. Абстрактная наглядность дает возможность быстро “схватывать” материал, делает его легко обозримым. “Главное сейчас, – продолжает Э. Г. Мингазов, – познание двух форм наглядности: созерцательной и практической. Суть практической формы наглядности – в наблюдаемости, воспринимаемости хода и результатов практических действий ”. Говоря о диалектическом пути познания истины (“от живого созерцания к абстрактному мышлению, а от него к практике”) и о наглядности, Э. Г. Мингазов делает вывод, что наглядность присуща всем трем ступеням, уровням познания.

Итак, появилось разграничение употребления термина “наглядность”, которая рассматривается на уровне абстрактного, что дает большую возможность говорить о наглядном обучении не только в младших классах, но и в вопросах преподавания математики, физики, химии в старших классах школы, в вузе. Однако четкой характеристики наглядного обучения нет, нет и компонентов, определяющих его суть.

В ряде других современных психологических исследований (Н. А. Менчинской, П. Я. Гальперина, Т. В. Кудрявцева, Л. В. Занкова) наглядность рассматривается на уровне абстрактного и в процессе практической деятельности.

З. И. Калмыкова утверждает, что "высшая форма наглядности – практическое действие с предметом". Практическая форма наглядности связана, по ее мнению, не только с натуральными объектами, действиями с ними (природными, бытовыми, производственными объектами), но и предполагает выполнение действий учащимися с предметами, их заменяющими (чертежами, схемами, графиками, рисунками). К практической форме наглядности З. И. Калмыкова относит действия с этими средствами наглядности, доступные наблюдению, а также и мыслительный эксперимент, так как он предполагает оперирование наглядными образами.

Итак, наглядность включает в себя деятельностный компонент, т.е. понятие наглядного обучения тесно связано с понятием деятельности, как практической, непосредственно с объектом или заменяющим его предметом, так и мыслительной.

Другая группа ученых связывает понятие наглядности с понятием образа. Наглядность в обучении трактуется как использование чувственно-наглядных образов объективной реальности, образующихся как при непосредственном восприятии, так и созданных ранее для достижения результата познания – знания.

Л. Н. Нуридинов связывает понятие наглядности с понятием образа, который бывает двух видов. В первую группу входят образы чувственно-наглядные, отражающие непосредственно реальные объекты. Ко второй группе он отнес рациональные образы, отражающие в абстрактной форме наиболее общие, существенные связи и стороны объективного мира, недоступные непосредственному чувственному восприятию. Понятия образ и наглядность неразрывно связаны, поэтому он выделяет и две ступени наглядности: чувственную и рациональную. "Рациональная наглядность – дидактическое средство, представляющее в чувственно-конкретной форме теоретическое понятие; с помощью этого средства учащиеся развивают творческую активность, логическое мышление, приобретают навыки познавательной самостоятельности, формируют творческие, научно-мировоззренческие понятия" [144].

Видим, что четкого определения наглядности в обучении, понятия наглядного обучения не дается, но выделяется линия создания чувственного представления об изучаемом явлении.

Л. М. Фридман считает, что наглядность - особое свойство психических образов, создаваемых в процессах восприятия, памяти, мышления и воображения при познании объектов окружающего мира. Не всякий образ нагляден. Для создания наглядного образа некоторого объекта нужен определенный уровень знаний об этом объекте. Л. М. Фридман говорит о том, что психический образ имеет разную степень наглядности, которая зависит от того, насколько понятен и знаком объект, от индивидуальных особенностей человека. Предмет или явление становятся наглядными для человека только тогда, когда для этого человека являются наглядными соответствующие этому предмету или явлению психические образы, а сами по себе объекты не обладают свойством наглядности. Внешним условием создания наглядного образа является активная познавательная деятельность, направленная на создание наглядного образа объекта. Пассивное наблюдение за объектом (созерцание) не приводит к созданию его наглядного образа. Л. М. Фридман дает такую формулировку: наглядность – это понимание и активность. Раскрывая подробно свой подход к наглядности [238], он кладет в основу целенаправленную деятельность в перцептивном плане, однако в определении наглядности это не нашло отражения. Термин наглядное обучение не употребляется.

В. Г. Болтянский подчеркивает, что понимание наглядности и ее роли в учебном процессе за последнее время изменилось: “иной раз запись, сделанная мелом на доске или даже устный рассказ учителя могут быть более наглядными, чем демонстрация явления в его натуральном виде” [29]. Он выдвигает свою формулу наглядности – изоморфизм плюс простота. Понятие наглядности у него неразрывно связано с понятием модели. “...для обсуждения вопроса о наглядности необходимо иметь две модели явления: первая из них – это абстрактная модель, т.е. теория явления, которую мы должны сформировать в сознании учащегося, и вторая – вспомогательная, учебная модель (“модель-пособие”). О наглядности имеет смысл говорить только в применении ко второй модели, если она изоморфна первой модели и обладает простотой восприятия” [30. С. 22–23]. Изоморфизм понимается как идентичность структур: “...две модели изоморфны, если, отвлекаясь от всех свойств этих моделей, не связанных с рассмотрением имеющихся в них предикатов, мы можем сказать, что эти модели “устроены” совершенно одинаково (по существу неразличимы)” [30. С. 51]. Понятие простоты не является постоянным и неизменным. Оно зависит от индивидуальных и возрастных особенностей человека, от его уровня знаний и умений, от его жизненного опыта и постоянно изменяется. С изменением понятия простоты изменяется и понятие наглядности, то есть, по мнению В. Г. Болтянского, понятие наглядности меняется, не является константой. Для одного человека данная модель может быть наглядной, а для другого нет, это зависит от простоты. Мы считаем, что наглядность модели тесно связана с той целью, которую выполняет модель на данном этапе, в данном курсе.

Итак, В. Г. Болтянский попытался выразить математической формулой понятие наглядности, которое связывает тесно с понятием модели. Он дал подробную характеристику средств обучения. В. Г. Болтянский отмечает, что “чрезвычайно важно, чтобы используемые в школе предметы учебного оборудования не только допускали, но и стимулировали нужную активность” [30. С. 14]. В работах В. Г. Болтянского не прослеживается четкой связи наглядности, деятельности, цели, чувственного компонента, нет ответа на вопрос, какое обучение математике является наглядным.

В. Е. Евдокимов характеризует наглядность через максимальную выраженность чувственного момента, а принцип наглядности в обучении рассматривается им как “систематическая опора на наглядные образы, возникающие в результате использования моделей”. Чувственные и наглядные образы, как он указывает, не совпадают полностью. В наглядном образе фиксируются и закрепляются те стороны изучаемого объекта, на которые направлена познавательная деятельность и которые имеют для этой деятельности определенное значение. Изоморфизм и простота – неотъемлемые признаки наглядности учебного оборудования. В. Е. Евдокимов связывает понятие наглядного образа с деятельностью (познавательной деятельностью) [63].

По мнению А. Н. Леонтьева, наглядность должна служить внешней опорой внутренних действий, совершаемых учащимися.

Итак, мы видим, что понятие наглядности значительно изменилось в сравнении о первоначальным. Теперь она рассматривается не только на конкретном, но и на абстрактном уровне и в процессе деятельности. Однако единого подхода к понятию наглядности нет, определения наглядного обучения не дается, нет характеристики его составляющих компонентов, не исследована достаточно специфика наглядного обучения математике.

Деятельность учителя в процессе преподавания математики в виду абстрактного характера, сложности и высокого уровня построения математического материала предполагает более детальную конкретизацию принципов обучения в направлении их системного использования. Наглядное обучение позволяет учителю овладеть активными методами обучения, способствует обеспечению связей принципов научности и доступности изложения материала, улучшению математической подготовки учащихся, позволяет обеспечить разностороннее и полное формирование изучаемого понятия, приводит к более высокому уровню логического мышления, поддерживает интерес учащихся к математике, способствует эстетическому восприятию материала, воспитывает творческое отношение к делу.

Основной задачей повышения эффективности применения методов наглядного обучения является отыскание и применение на практике активных методов формирования и организации учебной познавательной деятельности. Для решения поставленной проблемы следует выявить основные характерные черты изучаемого объекта, исходя из которых и дать определение наглядного обучения математике, указать средства их реализации в процессе учебной деятельности. Такой научно обоснованный подход и приводит к разработке эффективных средств и способов организации обучения.

В исследовании будем исходить из системного подхода, суть которого состоит в поиске научных средств, позволяющих выразить целостность изучаемого объекта.

Из всего разнообразия подходов к наглядному обучению следует выделить и изучить специфические черты, свойства и признаки, которые формируют объект-систему. В научной литературе, посвященной реализации системного подхода, разработано несколько путей ее осуществления. Остановимся на двух основных путях:

– отыскание системы через цель функционирования с последующими этапами анализа,

– отыскание системы через интеграцию и системные качества.

Суть первого подхода состоит в следующем. Основой выделения системы из среды служит цель. Реализация принципа системности происходит по следующим направлениям:

– выявление цели как системообразующего фактора, переводящего определенную совокупность элементов объективной реальности в режим взаимосодействия для достижения цели функционирования системы;

– установление компонентного состава системы, т.е. тех элементов, которые согласованно функционируют в направлении достижения цели;

– установление структуры взаимосвязей между компонентами системы;

– выявление особенностей структуры в ее динамике, в процессе функционирования;

– рассмотрение исследуемой системы в ее генезисе, становлении [86].

Второй путь является продолжением и дополнением первого. Изучая компоненты, функционирование которых и приводит к единой целостной системе, выявляют их специфические качества и рассматривают в качестве системных. Важно выявить и раскрыть механизм взаимодействия компонентов, интеграции элементов в единую систему.

Основной задачей системного исследования следует считать установление и изучение разнообразных связей, присущих рассматриваемому объекту, его компонентного состава. При системном подходе происходит анализ и синтез системы изучения. Сначала анализируются результаты исследований рассматриваемого объекта познания. Изучаемый объект может быть рассмотрен несколькими науками, но каждая из них исследует его односторонне, со своей точки зрения. При системном подходе полученные односторонние представления синтезируются.

При изучении дидактических закономерностей одним из путей осуществления системного подхода является моделирование. Модель должна отражать основные, главные черты дидактической системы и быть описана математически, кроме того, необходимо учесть роль каждого определяющего структуру элемента, его функции. Исходя из системного подхода, при исследовании наглядного обучения следует выявить структуру этого процесса, так как именно она и должна быть формализована при построении модели познавательной деятельности. Изучение этой структуры невозможно без знания специфики учебного процесса и особенностей методики применения средств и видов наглядного обучения, без использования имеющихся в педагогике подходов и методик. После изучения структуры наглядного обучения необходимо смоделировать систему организации познавательной деятельности в условиях наглядного обучения.

В этой связи исторический подход к наглядности в обучении математике как опоре на чувственное восприятие дает максимальный эффект в начальной школе и явно недостаточен при изучении высших разделов математики.

Здесь необходимо отметить три важных момента. Во-первых, настоящее исследование по проблеме наглядности в преподавании математики охватывает первое и необходимое звено познания – формирование представлений, возникающих на основе ощущений и восприятий. Представление, как правило, отражает лишь внешние признаки и стороны предметов и явлений материального мира, не всегда раскрывая их подлинную сущность.

Процесс восприятия (особенно при больших объемах информации, большой степени его формализованности) предполагает наличие узловых, опорных, характерных, специфических свойств и качеств объекта восприятия, будь то приемы деятельности, отражающие отдельное математическое знание или организованный набор знаний (это может быть доказательство теорем, раздел курса математики во всем многообразии логических взаимосвязей, материал отдельного урока или лекции и т.п.).

Поэтому актуальной является проблема такой организации процесса обучения математике, когда представления, возникающие в мышлении обучаемых, отражают основные, существенные, ключевые стороны предметов и явлений, процессов, в том числе посредством разумного моделирования математического знания.

Именно формирование этих узловых, опорных качеств объекта восприятия (модель) и представляет собой суть процесса наглядного обучения. Такой подход a priori предполагает моделирование объекта восприятия с опорой на нейрофизиологические механизмы памяти и психологию восприятия. При этом особую значимость приобретают модели, фиксирующие процедуру математических действий. Рассмотрим следующий пример из высшей математики.

Пример 1.3. Пусть дано векторное поле $\vec{A} = (X, Y, Z)$, где $X = X(a, b, c)$, $Y = Y(a, b, c)$, $Z = Z(a, b, c)$, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – направляющие единичные векторы. Ротор векторного поля $\vec{A}$ может быть определен следующим образом:

$$\mathrm{rot}\vec{A} \overset{\mathrm{def}}{=} \vec{i}\left(\frac{\partial Z}{\partial b} - \frac{\partial Y}{\partial c}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial X}{\partial c} - \frac{\partial Z}{\partial a}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Y}{\partial a} - \frac{\partial X}{\partial b}\right).$$

Это соотношение, как знаково-символическая форма, уже является моделью-заместителем реального явления. Однако процедура “появления” этого соотношения скрыта от обучаемых, понять, а значит, и лучше запомнить эту формулу непросто, тогда как, воспользовавшись понятием определителя третьего порядка и вектора градиента

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

ее легко воспроизвести

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial a} & \dfrac{\partial}{\partial b} & \dfrac{\partial}{\partial c} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{A},$$

как наглядную процедуру, связывающую понятия ротора с геометрическим понятием векторного произведения.

Во-вторых, процесс моделирования, поиск устойчивых ассоциаций, проверка адекватности восприятия предполагают серьезное проникновение в современные исследования нейрофизиологических механизмов восприятия, изучение этапов обработки стимула: сенсорного анализа, сличения с репертуаром памяти, принятия решения, использования законов психологии восприятия, серьезного изучения личности обучаемых. Поэтому не менее актуальной является проблема дать психолого-педагогическое обоснование концепции наглядного обучения математике, расширить путем диагностических методик психологические компоненты восприятия.

В-третьих, актуальность настоящего исследования определяется отсутствием единообразия трактовки принципа наглядности в обучении, слабым отражением специфики математической деятельности, оторванностью от практики, что не позволяет в полной мере использовать достижения психолого-педагогической науки. Деятельность учителя в процессе преподавания ввиду абстрактного характера, сложности и высокого уровня построения математического материала предполагает более детальную конкретизацию применяемых принципов обучения в направлении их системного использования. Таким образом, в настоящий период необходимо дать единую трактовку наглядного обучения и наглядности в обучении математике, разработать приемы деятельности учителя в процессе наглядного обучения, исследовать специфику наглядности в преподавании математики, используя положительный опыт передовых учителей и ученых.

Так как задачей педагогического процесса обучения математике является усвоение результатов знаково-символической деятельности обучаемыми, представленных в виде моделей, схем, кодов, знаков, символов, заместителей математических объектов, то большую роль приобретают

– организация содержания и формы, структуры и объема знаково-символических средств, которая приводит к необходимости учета психологических законов восприятия при их построении, возможностей и закономерностей нейрофизиологических механизмов памяти и мышления с целью усиления продуктивности восприятия (объем, точность, полнота, быстрота, эмоциональная окрашенность) и памяти (объем, точность запоминания и воспроизведения, прочность и точность запоминания);

– оперирование и организация познавательной деятельности со знаково-символическими средствами, объяснение с целью понимания и сознательного оперирования с математическими объектами.

Эти задачи ориентируют рассмотрение наглядности в целостном процессе обучения математике в тесной связи со знаково-символической деятельностью в направлении оптимального учета психологических и нейрофизиологических закономерностей восприятия, мышления и памяти.

1.4.3. Педагогический процесс наглядного моделирования в обучении математике

В процессе формирования математических представлений существенную роль играет специфика математических знаний, умений, навыков и методов. Математика оперирует с объектами, уже представляющими абстрагирование от действительного мира и, как правило, обобщающими разнообразные реальные и идеальные ситуации: интеграл как обобщение и абстрагирование понятий площади, длины объема, но в то же время абсолютно непрерывная функция; производная как обобщение и абстрагирование понятий касательной, скорости, плотности, но в то же время переменная площадь, заключенная под непрерывной кривой. Эти идеальные объекты являются основными для формирования других абстракций: свертка функций, обобщенная производная – распределение, мера, преобразование Лапласа и т.д. Поэтому опоры для внутренних действий обучаемых в процессе обучения математике следует искать не только во внешних действиях учителя, но и среди остаточных фреймов – следов предыдущих знаний в памяти обучаемых.

Основной задачей повышения эффективности применения наглядности в обучении математике в педвузе является отыскание и применение на практике активных методов формирования и организации учебной познавательной деятельности. Для решения поставленной проблемы следует выявить основные характерные черты изучаемого объекта, исходя из которых и дать определение наглядного моделирования в обучении математике, указать средства их реализации в процессе учебной деятельности.

В процессе выделения основных компонентов наглядного моделирования в обучении математике мы пришли к следующему выводу: в процессе обучения математике важно до предъявления объекта изучения предварительно провести подготовку обучаемого к восприятию, четко поставить цель, затем не только предъявить объект изучения, но и организовать деятельность обучаемого при работе с объектом адекватно знаково-символическим средствам представления математических знаний.

Определение. ***Наглядное моделирование в обучении математике – это процесс формирования адекватного категории диагностично поставленной цели устойчивого результата внутренних действий обучаемого на основе моделирования существенных свойств, отношений, связей и взаимодействий при непосредственном восприятии приемов знаково-символической деятельности с отдельным математическим знанием или упорядоченным набором знаний.***

Необходимым моментом организации процесса наглядного моделирования в обучении математике является постановка **дидактической задачи (схемы)**. Понятие дидактической задачи адекватно категории цели как “формирования на уровне нервной системы модели всех признаков и свойств будущего полезного результата, в связи с которым и ради которого развивались процессы афферентного синтеза” [4]. Реализация дидактической схемы осуществляется в процессе обучения, в процессе непосредственной взаимосвязи: обучающий – деятельность – обучаемые, причем деятельность, в данном случае процесс обучения, понимается по А. Н. Леонтьеву как система, имеющая свое строение, свои внутренние переходы и превращения, свое развитие [104].

Существенную роль в построении концепции наглядного моделирования в обучении играет принцип единства деятельности и психики. Усилия П. Жане, П. П. Блонского, Л. С. Выготского, Л. С. Рубинштейна, А. Н. Леонтьева и др. привели к пониманию памяти как предмета исследования, а деятельности – в качестве объяснительного принципа ее развития и функционирования. Проследим генезис связей процессов памяти с мышлением, восприятием, волевыми и эмоционально-мотивационными состояниями личности.

А. А. Смирнов указывал, что роль **понимания** при запоминании общеизвестна, и подчеркивал связь запоминания и процессов мышления, которые в этом случае выступают как средство более глубокого и отчетливого понимания материала [179]. Важнейшая роль мыслительной активности для эффективности запоминания нашла подтверждение в работах П. И. Зинченко [71], А. Н. Шлычковой. Понятие понимания тесно связано с понятием объяснения в учебной деятельности. Согласно “Толковому словарю русского языка” Д. Н. Ушакова, объяснение может означать: растолкование, делание более ясным, понятным, вразумительным; истолкование, установление причин, смысла, закономерности чего-либо. М. А. Данилов считал, что объяснение нового учебного материала – это раскрытие учителем существенных свойств изучаемого объекта, его внутренней структуры и связей с другими объектами. При этом объяснение достигает цели, если учащиеся ясно осознают познавательные задачи, вызывающие их активное отношение к новому знанию, так что целеполагание и знаково-символическая деятельность выступают не только как компоненты концепции наглядного моделирования в обучении, но и как необходимые элементы объяснения нового учебного материала. Термин “объяснение” используется и в логике. Согласно “Логическому словарю-справочнику” Н. И. Кондакова, объяснение – это совокупность приемов, помогающих установить достоверность суждений относительно какого-либо неясного, запутанного дела или имеющих целью вызвать более ясное и отчетливое представление о более или менее известном явлении. В качестве формирующих объяснение приемов автор называет сравнение, описание, аналогию, указание на причины, составление модели и т.д. Е. П. Никитин [141] считает, что объяснение – это раскрытие сущности объясняемого объекта, сущность же – это определенным образом организованная совокупность характеристик объекта, элиминирование которых (в отдельности или вместе) ведет к уничтожению объекта. Е. П. Никитин подчеркивает, что научному объяснению присущи полнота и развернутость, а мы добавим целостность подхода к объяснению. А. М. Сохор [215], проанализировав различные понятия, объяснения, дает следующее определение: “Объяснение – это раскрытие существенных свойств изучаемого, его внутренней структуры и связей с другими объектами. По логической форме объяснение – всегда умозаключение или последовательность умозаключений, вывод, рассуждение”. Нетрудно понять глубокую генетическую связь между концепциями объяснения и наглядного моделирования в обучении математике. Но это не тождественные понятия. Категория “объяснение” более широкая, чем “наглядное моделирование в обучении”, хотя и то, и другое представляют собой деятельность в рамках учебного процесса (применительно к обучению математике). В категории объяснения не обсуждается и не принимается как системное качество такой компонент процесса наглядного моделирования в обучении математике, как устойчивость перцептивных образов и формируемых следов усвоенных знаний. Этот аспект скорее конкретизирует категорию объяснения усилением методологической составляющей процесса.

Процесс объяснения, также как и процесс наглядного моделирования в обучении математике, должен завершаться пониманием (или адекватностью результатов внутренних действий обучаемых априорной модели (схемы). "Понимать объяснение – это... видеть сущность объясняемого в неразрывном единстве с конкретизацией этой сущности" (А. М. Сохор [215]).

В чем сущность мыслительных операций, приводящих к пониманию? В этот круг вопросов входят как физиологические, психологические, так и педагогические условия, обеспечивающие понимание сущности исследуемых математических объектов. В основе понимания лежит сопоставление структуры усвоенных знаний с формируемым перцептивным образом. Нам кажется, что применительно к обучению математике возможно следующее определение.

Понимание – это психический процесс в мышлении обучаемого, характеризующий адекватность сущности исследуемого математического объекта и перцептивного образа, формируемого в процессе обучения посредством устойчивых усвоенных знаний и актуализированной познавательной деятельности.

Это сопоставление может быть мгновенным актом (интуитивное понимание) или мыслительным процессом, длящимся различные промежутки времени (от нескольких минут до нескольких лет), причем мгновенным актом завершается как развернутое понимание, так и интуитивное понимание целостного математического объекта.

В динамическом плане адекватность категории цели результатам внутренних действий обучаемых представлена на схеме 4.

Наглядное моделирование в обучении математике предполагает понимание сущности исследуемого математического объекта обучаемым, поэтому может возникнуть вопрос, а не является ли любой процесс обучения математике, завершающийся пониманием, наглядно-модельным? Ответ на этот вопрос неизвестен, но, вероятно, утвердительный и требующий доказательного рассмотрения соответствующих образцов обучения математике (в том числе при отсутствии визуального наблюдаемых объектов), а также дальнейшего углубления методологического компонента наглядного моделирования в обучении математике.

Также сближает концепции объяснения и наглядного моделирования в обучении математике целостный подход к моделированию математических объектов. А. М. Сохор пишет: “Стройность, целостность формируемой модели, ясность принципов ее построения и, конечно, соответствие моделируемому объекту... – важнейшие условия полноценного объяснения”.

Схема 4

Схема структуры психических процессов понимания

Поэтому разработка технологии наглядного моделирования в обучении математике приведет к обогащению и конкретизации технологическими единицами и методическими приемами концепции объяснения в дидактике математики.

Экспериментальное исследование влияния **эмоций** на запоминание различного материала проводилось в работах Коха, Мельцера, Джерсила, Стагнера, О'Келли и др. Было выяснено, что события, оцениваемые испытуемым как очень приятные или очень неприятные, запоминаются лучше, чем нейтральные.

К. Д. Ушинский, Т. Рибо, П. П. Блонский, А. А. Смирнов и др. указывали на связь припоминания и запоминания и **волевых усилий личности**. В исследованиях Е. С. Махлак и И. А. Рапопорта, направленных на обнаружение конкретной связи определенных особенностей памяти и личности, было установлено, в частности, что развитие долговременной памяти у школьников старшего возраста связано с развитием волевых качеств личности [121]. Изучая мнемическую деятельность людей с различной самооценкой, А. И. Липкина установила, что характер самооценки влияет на результаты решения мнемической задачи [108]. Уровень волевых усилий личности определяет сосредоточенность внимания как необходимое условие осмысления и запечатления поступающей в мозг информации.

Следующий компонент концепции наглядного моделирования в обучении – знаково-символическая деятельность, в том числе модельность, построение модели и ее усвоение. Наглядное моделирование в обучении – это процесс создания "хорошо усваиваемых моделей", схем, кодов, замещений с опорой на нейрофизиологические и психологические механизмы восприятия. Моделирование является одним из составных компонентов наглядного моделирования в обучении. В процессе обучения мы формулируем модель существенных признаков объекта изучения, адекватных поставленной цели. Таким образом, наглядное моделирование в обучении есть процесс, включающий в себя как построение модели (схемы, кода, заместителя) (a priori), так и формирование адекватного результата внутренних действий обучаемых в процессе учебной деятельности. Предпочтение отдается "наглядной модели" в смысле опоры на устойчивые ассоциации, простые геометрические формы, психологические законы восприятия и нейрофизиологические механизмы памяти. Модель должна отражать суть понятия, формы или метода исследования.

Какими же факторами (средствами и внешними и внутренними действиями) обеспечивается **устойчивость** (наглядность) перцептивного образа, а далее и образа представления?

Устойчивостью называют способность объекта сохранять неизменной свою целостность, структуру, функции или пределы изменения существенных переменных при заданном внешнем воздействии [52].

Прежде всего, это **моделирование гармоничного целого** по терминологии В. А. Ганзена [52], который выделяет следующие пять признаков такового:

– повторяемость целого в его частях;

– соподчиненность частей в целом;

– соразмерность частей и целого;

– уравновешенность частей в целом;

– единство целого.

В. А. Ганзен отмечает, что наличие близких значений одного и того же признака создает при восприятии условия для суммации сигналов от различных частей объекта, что способствует возникновению доминирующего признака. Различия близких элементов создают условия для длительного сохранения внимания на высоком уровне.

Принцип соподчиненности означает упорядоченность частей или групп, в которые объединены все элементы целого. Соподчиненность обеспечивает иерархию зон внимания и предотвращает его колебания.

В целом должна существовать общая мера определенного масштаба (размера), с которой должны быть соотнесены все части целого, и величины этих частей и целого должны находиться в определенной закономерной связи. Этот принцип позволяет воспринимающим системам уловить метрическую закономерность связи частей и целого, что обеспечивает активность механизмов антиципации. Количественные закономерности в объеме восприятия улавливаются воспринимающими системами не сразу, но будучи выявленными, они значительно облегчают процесс восприятия.

Для объектов зрительного восприятия уравновешенность – это равновесие относительно пространственных осей. Вертикальная и горизонтальная оси неравноценны: главную роль играет вертикальная ось, что обусловлено гравитационными силами. Уравновешенность обеспечивает устойчивость внимания и баланс системы, воспринимающей цвет.

Принцип единства рассматривается как интегральный, обеспечивающий общность согласования структуры целого и его функции.

Далее В. А. Ганзен выделяет систему принципов и средств достижения гармоничности объектов восприятия (см. рис. 5).

Таким образом, выделяется следующий компонентный состав концепции наглядного моделирования в обучении математике как педагогического процесса формирования новых математических знаний:

– целеполагание (теоретический, практический, методический модуль);

– представление модели целостного математического объекта;

– оперирование знаково-символическими средствами (материальными и материализованными, перцептивными и идеальными);

– знаково-символическая деятельность (моделирование, схематизация, кодирование, замещение) и управление;

– создание условий устойчивости перцептивного образа и представления;

– адекватность априорной модели (кода, схемы, заместителя) результату внутренних действий обучаемого (перцептивному образу).

Функциональность Структурность

Тектоничность Пластичность

Единство

Симметричность Уравновешенность Повторяемость Тональность

Соразмерность Порядок

Ритмичность Контрастность

Пропорциональность

Масштабность

Рис. 5

Следующая модель характеризует указанный педагогический процесс (см. схему 5).

Таким образом, определены специфика и основные содержательные компоненты концепции наглядного моделирования в обучении математике как фактора целостного педагогического процесса профессионально-предметной подготовки учителя математики в педагогическом вузе.

Схема 5

Педагогический процесс наглядно-модельного обучения математике

Системная реализация в процессе исследовательского обучения математике всех видов наглядного моделирования выступает фактором формирования целостных образов математических объектов, неотъемлемым этапом имитации научного познания в обучении школьников, а значит, и значительно способствует усвоению математических знаний и развитию когнитивных способностей и математического мышления.

Таким образом, наглядное моделирование в обучении есть процесс, включающий в себя как проектирование и построение a priori модели (схемы, кода, заместителя), отражающей существо объекта восприятия, так и формирование адекватного результата внутренних действий обучаемых в процессе учебной деятельности. Предпочтение отдается “ наглядной модели” в смысле опоры на устойчивые ассоциации, простые геометрические формы, психологические законы восприятия и нейрофизиологические механизмы памяти. Наглядная модель должна отражать суть понятия, формы или метода исследования. Выявление сущности каждого компонента наглядного моделирования в обучении математике предполагает поиск, познание и раскрытие закономерностей эффективного ее функционирования, создания условий для комфортной совместной деятельности преподавателя и ученика, получение диагностируемого адекватного результата внутренних действий обучаемого. Использование “мягких математических моделей” при создании ориентировочной и информационной основы учебной деятельности создают условия для оптимального управления познавательной деятельностью обучаемых. Важным обстоятельством является то, что наглядное моделирование осуществляется по III типу ориентировки П.Я. Гальперина, способствует формированию теоретического (математического) мышления и целостному подходу к выявлению сущности учебных элементов.

Определение и наглядное моделирование ООУД в процессе исследовательского поведения школьников создает основы для формирования положительной мотивации достижения результатов, самореализации личности и мотивации интеллектуального напряжения. В обосновании такого подхода лежит методологический тезис А.Н. Леонтьева: “...актуально осознается только то содержание, которое является предметом целенаправленной деятельности ученика, т.е. занимает структурное место непосредственно цели внутреннего или внешнего действия в системе той или иной деятельности”.

Еще с начала XX столетия целый ряд психологов (О. Зельц, М. Вертхаймер, М. Бунге и др.) подчеркивали существенность процесса визуализации исследовательской ситуации как важного этапа решения задачи. Интересно отметить, что подобные вопросы возникают при анализе деятельности оператора автоматизированных систем управления (АСУ) в инженерной психологии т.к. основным видом его деятельности является деятельность с информационными моделями. В информационную модель включаются данные об объектах управления, состоянии внешней среды и самой системы управления. “Информационная модель для оператора является источником информации, пользуясь которой он оценивает ситуацию и принимает решения, обеспечивающие правильную работу системы и выполнение возложенных на нее задач" [70. С. 122]. Работая с информационной моделью (доска управления, индикаторы, экраны и т.п.) оператор АСУ принимает решения, вне непосредственного контакта с реальностью и объективно заинтересован в получении достоверной информации и адекватном реагировании на изменения ситуации. При этом наблюдаются очевидные аналогии с процессом обучения и проблемой наглядного моделирования объектов и действий. "Информационная модель должна быть наглядной, т.е. оператор должен иметь возможность воспринимать сведения, даваемые моделью быстро и без их кропотливого анализа" [70. С. 497].

Следующая таблица показывает прямые аналогии содержания понятия наглядного моделирования в обучении и требований к информационным моделям в инженерной психологии ([70. С. 496-500]).

Таблица 5

Критерием эффективности при работе с информационной моделью (также как и с наглядной моделью в обучении) должны служить время и точность выполнения заданий при получении успешного результата. Безусловно, что в учебной деятельности критерием эффективности управляющих воздействий служат также (и в первую очередь) академическая успешность и позитивные изменения в когнитивной и аффективной сферах личностного развития.

Схема 6

Аналогия процессов наглядного моделирования в обучении и работы оператора АСУ

Обучение студентов гладким математическим объектам – необходимый элемент образования: дифференцируемые функции и линейные системы дифференциальных уравнений позволили решить громадное число теоретических и прикладных задач. Но все-таки, как выяснилось в последней четверти прошлого столетия, мир, в котором мы живем, сильно нелинейный [97, 109, 116, 233], и для понимания происходящих в нем динамических процессов требуются нелинейные методы их исследования. А самое важное – необходимо формирование мышления человека с учетом того, что оно нелинейно по своей природе [245].

Нелинейные объекты и процессы изучаются в различных математических дисциплинах; например, в теории вероятностей (стохастические процессы), в геометрии (инверсия, бирациональные отображения и преобразования), в математическом анализе (нелинейные функции, канторово множество пр.). Тем не менее, целенаправленного воспитания и формирования у студентов нелинейного мышления сегодня в вузах нет. Одна из причин такого положения дел в образовании заключается в том, что нелинейная наука сама еще находится в стадии становления и имеет возраст не более 30 лет; другая причина – малое количество учебных задач в арсенале преподавателя математики, несмотря на обширную научно-популярную литературу.

Научить мыслить нелинейно — значит научить мыслить в альтернативах, предполагая возможность смены темпа развертывания событий и качественной ломки, фазовых переходов в сложных системах. В современных условиях бурного развития математического моделирования, вычислительного эксперимента, компьютерной графики становится особо актуальным формирование нелинейного мышления на основе синтеза визуализации математических объектов и формально-логических методов.

Обратимся опять к классическому примеру Ван дер Вардена непрерывной на отрезке и нигде не дифференцируемой функции, график которой представлен на рис. 6.

Рис. 6. Пример Ван дер Вардена всюду не дифференцируемой функции; ее графиком является аффинно самоподобная фрактальная кривая [115]

Рассмотрим для любого целого неотрицательного n функцию

$$\varphi_n(x) = \tfrac{1}{\pi 2^{n+1}} \mid \arcsin\ \sin 2^n \pi x \mid, \tag{1}$$

или, равносильно,

$$\varphi_n(x) = 2^{-n}(\tfrac{1}{2} - \mid 2^n x - [2^n x] - \tfrac{1}{2} \mid). \tag{2}$$

Выясним некоторые свойства функции

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x). \tag{3}$$

Свойство 1. *Функция* (3) *периодическая с периодом* 1.
Доказательство следует из периодичности (2).

Свойство 2. $\varphi_0(2^{-n}) = 2^{-n}$ *при* $n > 0$.
Доказательство следует непосредственно из (2).

Свойство 3. $\varphi_m(2^{-n}) = \begin{cases} 2^{-n}, & m < n; \\ 0, & m \geq n. \end{cases}$
Доказательство следует непосредственно из (2).

Рис. 7. Графики первых пяти частичных сумм для функции Ван дер Вардена

Свойство 4. *Если* $x = 2^{-n}$, *то*

$$f(\tfrac{x}{2}) = \tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{2} f(x). \tag{4}$$

Доказательство. Из (3) и свойств 2 и 3 следует

$$f(2^{-n}) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(2^{-n}) = n 2^{-n}.$$

Поэтому

$$f(2^{-(n+1)}) = (n+1)2^{-(n+1)} = \tfrac{1}{2}n2^{-n} + 2^{-(n+1)} = \tfrac{1}{2}[f(2^{-n}) + 2^{-n}].$$

Свойство 5. $f(x) = f(1-x)$.

Доказательство следует из равенства $\varphi_n(x) = \varphi_n(1-x)$.

Свойство 6. *Максимум функции* $f(x)$ *равен* $M = \frac{2}{3}$.

Доказательство. Пусть γ – график функции $f(x)$. Рассмотрим частичную сумму $f_k(x) = \sum\limits_{n=0}^{k} \varphi_n(x)$. Графиком функции $f_k(x)$ является ломаная L_k, вписанная в γ (рис. 7). При этом очевидно, что

$$\max f_{2m+1}(x) - \max f_{2m}(x) = 0,$$

$$\max f_{2m+2}(x) - \max f_{2m}(x) = 2^{-2m-3}.$$

Следовательно,

$$M = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{32} + \ \ldots\ + \tfrac{1}{2^{2n-1}} + \ \ldots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \tfrac{2}{3}.$$

Свойство 7. *Для любого* $x \in [0; \frac{1}{2}]$ *справедливо* (4).

Доказательство. Пусть в двоичном представлении

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 2^{-k}, \quad a_k \in \{0; 1\}.$$

Тогда отсюда, из (3) и свойства 3 следует

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n\,(\sum_{k=1}^{\infty} a_k 2^{-k}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k 2^{-k}) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k 2^{-k},$$

$$f(x/2) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x/2) = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) a_k 2^{-(k+1)} =$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) a_k 2^{-k} = \tfrac{1}{2}(\sum_{k=1}^{\infty} a_k 2^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k 2^{-k}) = \tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{2} f(x).$$

Фрактальность. Хорошо известно [97], что аттрактор системы итерированных сжимающих преобразований (СИФ)[1] является фрактальным множеством, как правило, дробной размерности Минковского.

В нашем случае, опираясь на свойство 7, легко установить, что аффинные преобразования с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

или, проще,

$$A : (x,\ y) \mapsto (\tfrac{1}{2}x,\ \tfrac{1}{2}(x+y)),$$
$$B : (x, y) \mapsto (\tfrac{1}{2}(x+1),\ \tfrac{1}{2}(-x+y+1)),$$

отображают γ на себя и составляют пару образующих группы автоморфизмов кривой γ. Кривая γ строится с помощью СИФ следующим образом.

Пусть K — единичный квадрат с вершинами (0; 0), (1; 0), (1; 1), (0; 1) (рис. 8).

Рис. 8. Образы квадрата после нескольких итераций; а – после двух, б – после пяти итераций

---

[1] СИФ – система итерированных функций. Так принято говорить и в случае системы итерированных преобразований или отображений, так как они задаются с помощью уравнений, т.е. функций.

Преобразования A, B отображают K на левый и правый параллелограммы соответственно. Выполняя эти отображения бесконечно много раз, мы получим последовательность:

$$\begin{gathered} T_0 = K; \\ T_1 = A(T_0) \cup B(T_0); \\ \dots \\ T_n = A(T_{n-1}) \cup B(T_{n-1}); \\ \dots \end{gathered}$$

Фигура $T = \lim\limits_{n\to\infty} T_n$ получена после бесконечного числа итераций и имеет нулевую площадь. Действительно, площадь фигуры T_n равна $S_n = 2^{-n}$. Следовательно, площадь фигуры равна

$$S = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0.$$

Фигура T является одним периодом кривой γ и обладает свойством аффинного самоподобия [150],[1] так как получена посредством системы итерированных аффинных преобразований A, B. Самоподобие в данном случае означает, что любой, самый малый участок фрактальной кривой T можно с помощью аффинных преобразований A, B отобразить на исходную кривую T.

Кривую γ можно получить другим способом, вполне пригодным для реализации на компьютере. Прежде всего, обозначим через R отображение плоскости на себя, которое точке M_0 – стартовой точке – ставит в соответствие точку $M_1 = R(M_0)$, причем R действует на точку M_0 либо матрицей A, либо матрицей B. Выбор матрицы A происходит в любой точке с вероятностью $p \in (0;\, 1)$, а матрицы B – с вероятностью $q = 1-p$. В нашем случае разумно положить $p = q = 0,5$.

Важным обстоятельством здесь является нелинейность отображения R: если точки X, Y, Z коллинеарны, то, например, точки $A(X)$, $B(Y)$, $B(Z)$ не обязаны быть таковыми.

---

[1] Бенуа Мандельброт аффинно самоподобные множества называет самоаффинными [115, 116]. В работе [150] рассматриваются фракталы (мультифракталы), которые не являются аффинно самоподобными, но проективно самоподобными.

Рис. 9. Для первого и второго монстра Ван дер Вардена в двойной логарифмической системе координат точки $(\ln k; \ln L)$ ложатся на прямую с угловым коэффициентом $D = 0,35$

В силу того, что R – сжимающее отображение, бесконечная орбита $M_0 \mapsto M_1 \mapsto \ . \ . \ . \ \mapsto M_n \mapsto \ . \ . \ .$, где $M_n = R^{\circ n}(M_0)$ (образ стартовой точки M_0 в n-кратной итерации отображения R), после достаточно большого n приблизится к кривой γ на любую наперед заданную бесконечно малую величину. Кривая при этом называется *аттрактором* (т.е. притягивателем, притягивающим множеством). Все орбиты, независимо от стартовой точки, достаточно быстро стремятся к аттрактору [1]. Поэтому прорисовку аттрактора на мониторе лучше начать после выполнения достаточно большого числа шагов (порядка 20).

Из свойства 6 мы знаем максимум функции $f(x)$, равный $2/3$. Выясним, при каких x она принимает значение $2/3$, т.е. решим уравнение

$$f(x) = \tfrac{2}{3}.$$

Для этого, прежде всего, заметим, что

$$\alpha = AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

---

[1] Если точка находится от начала координат на расстоянии r, то после $n = 1 + [\log_4 r]$ итераций она окажется в единичном квадрате K.

$$\beta = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Рис. 10. Второй монстр Ван дер Вардена – аффинно самоподобная кривая

Это означает, что преобразование

$$\alpha : (x,\ y) \mapsto \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}\right)$$

является гомотетией с центром $M_1 = \left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)^1$ и коэффициентом $\frac{1}{4}$, а преобразование

$$\beta : (x,\ y) \mapsto \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2},\ \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}\right)$$

– гомотетией с центром $M_2 = (\frac{2}{3},\ \frac{2}{3})$ и тем же коэффициентом $\frac{1}{4}$. Следовательно, $x = \frac{1}{3}$, $x = \frac{2}{3}$ – решения уравнения (5). Кроме этих решений, существуют и другие решения. Множество всех решений имеет мощность континуума и всюду разрывное. Точнее, – канторово множество, которое получается следующим образом.

Разделим отрезок $I_0 = [\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}]$ на четыре равных отрезка и выберем из них два крайних. Обозначим объединение крайних отрезков через

---

[1] Неподвижной точкой гомотетии $x \mapsto kx + b$ служит точка $x = \frac{b}{1-k}$.

I_1. На втором шаге с каждым отрезком из I_1 поступим аналогично, получив объединение I_2 из $n_2 = 2^2$ отрезков, длина каждого из которых равна $l_2 = 3^{-1}4^{-2}$. На k-м шаге мы получим множество I_k, состоящее из объединения $n_k = 2^k$ равных отрезков длиной $l_k = 3^{-1}4^{-k}$. При бесконечном числе шагов получится цепочка вложений

$$I_0 \supset I_1 \supset \ldots \supset I_k \supset \ldots \supset I,$$

где $I = \lim\limits_{k\to\infty} I_k$.

Для доказательства того, что I – множество решений уравнения (5), достаточно убедиться, что I – аттрактор системы итерированных гомотетий α, β. Рекомендуем читателю доказать этот факт в качестве упражнения.

Рис. 7 подсказывает нам еще один способ построения кривой γ. Для построения кривой γ на отрезке $[0;1]$ рассмотрим ломаную $A_0A_1A_2$, $A_0 = (0;\ 0)$, $A_1 = (\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$, $A_2 = (1;\ 0)$. Эта ломаная является графиком функции $f_0 = \varphi_0$. Чтобы построить график частичной суммы $f_k(x) = \sum\limits_{n=0}^{k} \varphi_n(x)$, построим последовательно графики функций $f_1, f_2, ...$

При $k = 1$ построим точки B_i как вершины треугольников $A_{i-1}B_iA_i$ такие, что медианы, проведенные из вершин B_i, являются вертикальными и равны $m_i = 2^{-2}$ $(i = 1, 2)$. Затем сделаем переобозначение:

$$\begin{array}{ccccc} A_0 & B_1 & A_1 & B_2 & A_2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{array}$$

и переходим к следующему значению k.

При $k = 2$ построим точки B_i как вершины треугольников $A_{i-1}B_iA_i$ такие, что медианы, проведенные из вершин B_i, являются вертикальными и равны $m_i = 2^{-3}$ $(i = 1, ..., 2^2)$. Затем сделаем сначала одно переобозначение: $A_0 \to A_0$, $A_i \to C_{2i}$, $B_i \to C_{2i-1}$, $i = 1..3$, а затем – другое: $C_j \to A_j$, $j = 0..6$ и т.д.

На шаге k построим точки B_i как вершины треугольников $A_{i-1}B_iA_i$ такие, что медианы, проведенные из вершин B_i, являются вертикальными и равны $m_i = 2^{-(k+1)}$ $(i = 1, ..., 2^k)$. Затем сделаем сначала одно переобозначение: $A_0 \to A_0$, $A_i \to C_{2i}$, $B_i \to C_{2i-1}$, $i = 1, ..., 2^k$, а затем – другое: $C_j \to A_j$, $j = 0, ..., 2^{k+1}$ и т.д.

В пределе при $k \to \infty$ мы получим в точности кривую как предел множества длин ломаных $A_0A_1\dots A_k$, число звеньев которых растет экспоненциально. Что касается длины этой ломаной, то она должна расти по степенному закону $L \sim k^D$, согласно закону Ричардсона [116, 233], где D – некоторое число, обычно дробное. После логарифмирования степенной закон принимает линейный вид $\ln L \sim D \ln k$. Из рис. 9 находим, что $D \approx 0,35$. Это означает, что размерность Минковского (или емкость) кривой γ близка к величине $D_0 = 1 + D = 1,35$. Но на самом деле мы можем оказаться далеко от истины, так как пользовались численными методами, не подкрепив их теоретическими оценками.

Здесь мы сталкиваемся с кризисным явлением в нелинейной науке вообще и фрактальной геометрии в частности. Суть кризиса – в отсутствии удовлетворительных методик вычисления размерности Минковского для аффинно самоподобных фракталов. Б. Мандельброт [115] предлагает некоторые подходы для вычисления емкости “самоаффинных” фракталов специального вида, которыми можно пользоваться, оставаясь в рамках конвенционализма.

Глава 2

Дидактическая система математического образования и ее компоненты

2.1. Модель дидактической системы математического образования студентов педвузов в единстве методологических, теоретических, практических и общекультурных компонентов

Несмотря на многочисленные попытки изменения учебных планов и программ, введения государственного образовательного стандарта и его модификаций, проявления тенденций демократизации высшего педагогического образования за последние десятилетия не происходит реальных изменений в качестве профессиональной подготовки учителя естественно-научного профиля средней школы. Более того, наши учителя и методисты озабочены определенным падением уровня образования в педвузах России. Усугубилась ситуация, о которой знаменитый немецкий математик Ф. Клейн еще в 1924 году писал как о “двойном разрыве” между школьной и вузовской математикой, указывая на необходимость преподавания математики с точки зрения высшей. Об осторожности и объеме фундаментальных знаний будущего учителя неоднократно говорил великий педагог К.Д. Ушинский. И дело не только в реальном уменьшении учебных часов на естественно-научные дисциплины или в объективно сложившейся экономической и демографической ситуации, когда в педвузах учатся в основном средние по способностям студенты, а в качестве и действенности освоения профессионально-ориентированного естественно-научного содержания, достаточного для теоретического обобщения школьного предмета и направленного на развитие мышления и личностных профессиональных качеств будущих учителей естественно-научного профиля. С другой стороны, исторически в содержании подготовки учителя естественно-научного профиля средней школы фундаментальная и методическая составляющие (специализированная подготовка к педагогической деятельности) традиционно разделялись. Например, в 90-х годах XIX века Министерство народного просвещения было вынуждено отказаться от предварительных испытаний, которые были установлены для окончивших курс университета при определении на учительские должности. Более того, существовавшие при учительских округах одногодичные курсы для подготовки учителей средней школы влачили жалкое существование, так как окончившие университет считали излишним тратить год на свою педагогическую подготовку и предпочитали прямо поступать на учительские места в среднюю школу. Но и в начале XXI века часть наших ученых-педагогов убеждена в том, что сначала надо давать широкое фундаментальное университетское образование в области наук, а затем проводить специализированную подготовку к педагогической деятельности.

Анализ обученности трудоустроившихся выпускников педвузов показывает, что менее 30% из них овладели профессиональными знаниями и умениями на высоком уровне (учились на “4” и “5”), но и последние не всегда успешны в педагогической деятельности. Разрабатываемые стандарты высшего профессионального образования в лучшем случае отражают современные тенденции в образовании, зарубежный и отечественный опыт, но слабо коррелируют по содержанию и структуре с комплексностью и научностью подходов в проектировании. Так, если обратиться к фактическому состоянию дел в естественно-научном образовании студентов – будущих учителей, можно обнаружить, например, противоречие между объективной целостностью естественно-научного знания и содержанием предметной подготовки будущего учителя. К примеру, в ГОС второго поколения по специальности “Физика”, где математика представлена в объеме 800 часов (с возможностью использования 195 часов национально-регионального компонента), содержание требований к уровню математической подготовки будущего учителя физики выглядит, мягко говоря, странно. Дело в том, что не удовлетворяются два важнейших принципа построения содержания образовательного стандарта: его объективация и наличие универсального ядра. Дословно аннотация содержания выглядит так: математический анализ (в стандартной комплектации), далее функциональный анализ, вариационное исчисление, теория вероятностей и математическая статистика, исследование операций и т.д.

Но что отбирать в функциональном анализе? Теорию линейных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве или теорию пространств Соболева и обобщенных функций Шварца; спектральную теорию или гармонический анализ и преобразование Фурье медленно и быстро растущих обобщенных функций? А может быть, сильные и слабые сходимости в локально выпуклых пространствах или теорию диффузионных процессов? Все эти разделы функционального анализа имеют достаточно прочные физические корни и формально могут быть представлены в учебных планах. Однако беда в том, что для двух произвольно выбранных педвузов пересечение содержания математической подготовки может оказаться близким к пустому и в то же время не противоречащим стандарту. А как быть с вариационным исчислением: остановиться на формульных и геометрических вопросах или рассматривать глубокие разделы теории функций, вырожденных лагранжианов и континуальных интегралов Фейнмана? Можно ли успеть что-либо сказать о прямых методах вариационного исчисления в решении краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных или о полях экстремалей и уравнении Гамильтона-Якоби? О каких стандартах профессиональной подготовки будущего учителя при этом можно говорить? Поэтому отсутствие обоснованных принципов отбора, универсального ядра содержания предметной подготовки будущих учителей, проектируемого, в том числе, и в методологическом плане, безусловно, может негативно сказаться на качестве их профессиональной подготовки.

Реальные инновационные процессы и эффективные педагогические выводы в этом направлении могут актуализироваться только при условии глубокого теоретического анализа проблем и противоречий образовательного процесса подготовки учителя, глубокого психологического анализа и диагностики учебной деятельности студента, системогенеза и практики подготовки учителя естественно-научного профиля в педагогическом вузе. Исследование такого рода проводится в Ярославском государственном педагогическом университете им. К.Д. Ушинского с 1997 года в направлении определения содержания и технологии профессиональной подготовки учителя (специальности “математика”, “физика”, “химия”) на основе инновационной концепции фундирования (научный руководитель – академик РАО В. Д. Шадриков). В рамках этой концепции впервые в истории России разработан и с 2001 года внедряется экспериментальный ГОС высшего педагогического образования по специальности “математика” (приказ № 2046 от 14.05.2001 г., МО РФ). В Ярославле на протяжении последних семи лет регулярно проводятся школы-семинары по проблемам математического образования будущих учителей, в той или иной мере трактующие результаты и передовой опыт исследования (последние четыре года – это Колмогоровские чтения, в честь великого математика академика А. Н. Колмогорова, родовые корни которого находятся на ярославской земле). Ряд университетов России активно участвует в реализации инновационной технологии фундирования для повышения качества профессиональной подготовки учителей естественно-научного профиля (Астраханский, Вологодский, Ставропольский, Тюменский, Пермский, Костромской и др.).

Существенным фактором является и то, что Россия включилась в Болонский процесс на фоне интеграции в мировое образовательное пространство, отдавая приоритет общечеловеческим ценностям на всех ступенях высшего профессионального образования. Однако при этом необходимо сохранить в новых парадигмах традиционную фундаментальную составляющую нашего образования, адекватно ориентированную на будущую профессиональную деятельность учителя. Уникальным явлением в мировой истории является Российская система высшего педагогического образования, ведущая свое начало от Главного Педагогического Института первой половины XIX века в Петербурге и получившая свое развитие в советское время XX века. Достаточно отметить, что например, около 90% учителей Ярославской области – выпускники педагогических вузов и почти все заслуженные учителя в этом регионе также окончили педвузы, и эта картина характерна для большинства российских регионов. Поэтому надо понять и принять, что альтернативы массовой подготовке учителя в педагогических вузах – этой уникальной образовательной ниши в системе высшей профессиональной подготовки в России, нет; вопрос заключается в определении научно-обоснованного содержания, форм, методов и технологий, повышении качества профессиональной подготовки учителя, отвечающих современным реалиям жизни и запросам общества.

В процессе проектирования дидактической системы математического образования основополагающим является системный подход как важнейшее условие оптимальности решения педагогических проблем. “В структуре дидактической задачи... отображается цель, достижение которой обусловлено ситуацией (условиями) и располагаемой информацией (содержанием) для деятельности. Для дидактической задачи цель – необходимость формирования определенных качеств личности, ситуация (условия) – это исходные личностные качества учащихся, а информация – содержание учебного предмета” [23].

Компонентом принято считать какую-либо часть системы, вступающую в определенные отношения с другими ее частями. Компонент может выступать в системе как элемент (минимальная единица системы, которую в ее рамках можно считать неделимой) и как подсистема (часть системы, которая сама состоит из нескольких взаимосвязанных и взаимодействующих элементов).

Дидактическая система математического образования определяется представлением о ней как о проекте научно-управляемого процесса,

– имеющего целью достижение высокого уровня математической готовности выпускников педвузов к выполнению функций обучения, воспитания и развития обучаемых средствами математики,

– связанного с реализацией общедидактических принципов: научности, доступности, гуманизации, дифференциации и т.д.,

– организуемого с учетом современного состояния школьного образования: Государственного образовательного стандарта средней (полной) школы, разнообразия форм средних учебных заведений, вариативности учебных программ и учебников, разработки новых педагогических технологий,

– определяемого рядом структурообразующих факторов: углубления математической подготовки фундированием на основе базового школьного компонента, реализации технологии наглядного моделирования в обучении математике, профессионально-педагогической направленности математического образования, модульности проектируемого содержания предметной подготовки.

Невысокая эффективность действующей системы подготовки к усвоению учебного материала видна на примере учебных планов. Что же является ориентиром для студентов в области содержания образования? Учебный план – этот документ предназначен, в основном, для преподавателей, администрации, планирующих органов; учебная программа – непосредственно предъявляется студенту, как правило, в виде рабочей программы (тематического плана курса) и в виде экзаменационной программы, в той или иной степени детализирующей рабочую программу и по форме представляющей собой линейный перечень 20–30 экзаменационных вопросов (в лучшей случае); учебные материалы – учебники, учебные пособия, методические указания, педагогические программные продукты, в лучшем случае объединенные в учебно-методический комплекс.

Такой организации учебного процесса совершенно недостаточно для целостного и устойчивого представления о содержании математической дисциплины (предмета). Об этом свидетельствуют и результаты успеваемости студентов на младших курсах, и результаты государственных экзаменов. Необходимо эффективно использовать структуризацию учебного материала, шире применяя диапазон миллеровских чисел 7 ± 2, и разработку дополнительных внутренних связей (спирали фундирования, обучающие и деятельностные модули, аннотирование экзаменационных программ, использование сквозных тем и т.п.), сделав их рассмотрение ориентиром познавательной деятельности обучаемых.

Эффективная организация учебно-методической деятельности студентов в рамках дидактической системы требует реализации важных для математической деятельности дидактических принципов: фундирования, целостности, профессионально-педагогической направленности, наглядно-модельного обучения, модульности, творческой активности.

Реализация рассмотренных принципов в дидактической системе математического образования должна осуществляться в следующих компонентах содержания образования:

– учебном плане предметного блока Государственного образовательного стандарта;

– учебных программах (образовательных профессиональных программах) математических дисциплин;

– теоретическом и практическом материале учебных дисциплин, отражающих содержание учебных программ;

– методологическом и методическом обеспечении преподавания математики на основе критериев отбора содержания математического образования.

Структурообразующим фактором для построения дидактической системы математического образования будущего учителя математики была положена наша **концепция наглядного моделирования в обучении математике.** Определяя, систематизируя и обосновывая структурные компоненты дидактической системы, мы понимаем значимость и системное качество нашей концепции в проектировании будущего учебно-воспитательного процесса.

Эффективным средством проектирования дидактической системы является модульный принцип построения отдельных ее компонентов. Существуют различные точки зрения на сущность и компоненты модуля как в плане структурирования обучения, так и разработки форм и методов обучения (В. Гольдшмидт, М. Гольдшмидт, Дж. Рассел, Ю. К. Балашов, В. А. Рыжов и др.). Так, А. А. Вербицкий [41] вводит понятие деятельностного модуля, в отличие от понятия обучающего модуля (фрагмент содержания курса вместе с методическими материалами к нему), и планирует их в следующие блоки: общеметодологический, конкретно-методологический, теоретический, практический и социальный, совокупность которых и составляет модель специалиста. Ю. К. Балашов и В. А. Рыжов [15] отмечают, что модуль может быть представлен как учебный элемент в форме стандартизированного буклета, состоящего из следующих компонентов:

– точно сформулированная учебная цель;

– список необходимого оборудования, материалов и инструментов;

– список смежных учебных элементов;

– собственно учебный материал в виде краткого конкретного текста, сопровождаемого конкретными иллюстрациями;

– практические занятия для отработки необходимых навыков, относящихся к данному учебному элементу;

– контрольная (проверочная) работа, которая строго соответствует целям, поставленным в данном учебном элементе.

В. М. Монахов [133] дает понятие дидактического модуля как содержательного блока курса, соответствующего отдельным темам или разделам программы и определяющего содержание обучения и инструментарий учителя в границах технологического рабочего поля деятельности учителя. Опыт применения модульного обучения в США, Германии, Англии, Шотландии и в нашей стране позволяет выделить следующие его основные элементы: цель (общая или специальная), планируемые результаты обучения (знания, умения, навыки, методы), содержание (контекст, методы и формы обучения, процедуры оценки), максимальная индивидуализация продвижения в обучении (вариативность). Например, в школах Шотландии весь цикл учебных предметов разбивается на 2000 модулей трех типов: общие, специальные, интегративные.

В целом, по оценкам исследователей, модульное обучение позволяет сократить время учебного курса на 30% без ущерба для полноты изложения и глубины усвоения материала.

В то же время модульное обучение должно сочетаться с другими методами и концепциями эффективной организации учебной деятельности. Исследования, проведенные профессором Е. И. Смирновым в рамках Кассель-проекта (1997-2000 гг.) под руководством профессора Д. Берджеса (Англия) по диагностике математической подготовки школьников в различных странах мира (в том числе и в России), дали следующие результаты на репрезентативных выборках:

Таблица 6

Среднее количество баллов по трем тестам: число, алгебра, геометрия (школьники 13+лет)

Страна	Число	Алгебра	Геометрия	Σ
Англия	17,6	11,3	15,4	44,3
Шотландия	18,2	8,8	14	41
Германия	23,5	12,5	11,3	47,3
Сингапур	33,4	23,9	18,1	75,4
Россия	26,5	19,5	17	63
Польша	24	16,6	13,6	54,2
Финляндия	21,1	8	8,8	37,9
Греция	20,6	11,8	8,3	40,7
Голландия	26,3	13,3	19,2	58,7

Сочетание концепций наглядного моделирования в обучении и модульности позволяет придать дидактической системе свойство динамичности и гибкости. Как отмечает М. А. Чошанов [246], “система может содержать как базовые, так и вариативные модули, а модуль, в свою очередь, иметь базовый и вариативный компоненты”.

Рассмотрим математическое образование будущего учителя математики с точки зрения метасистемы – профессионального образования как целостного педагогического процесса. Имея в виду нормативные документы Министерства образования, постановления Правительства РФ и, прежде всего, Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования, ограничим рассмотрение вопроса содержанием и структурой предметного блока (3900∼4000 часов трудоемкости учебных предметов) основных требований подготовленности специалиста – учителя математики. Согласно М. С. Кагану, “...адекватное представление о сложнодинамической системе требует трех плоскостей ее исследования – предметной, функциональной и исторической” [80].

В основе целеполагания **теоретического модуля** лежит задача подготовки будущего учителя математики с заданными характеристиками высокого уровня теоретической (фундаментальной) обученности, достаточной для творческого владения школьным математическим материалом.

Схема 7

Дидактическая система математического образования студентов педвузов (целостный процесс)

Потребности и мотивы

Целеполагание

Задачи

Формирование научно-теоретического мышления; личностная ориентация; адекватность восприятия математических объектов; творческая активность; математическая интуиция; научение (ассоциативное и интеллектуальное)

Функции

обучающая, развивающая, воспитывающая, ориентационная, коммуникативная, оценочная, исследовательская, самообразовательная

Принципы

фундирования, целостности, профессионально-педагогической направленности, наглядно-модельный, гуманизации, развивающего обучения, оптимальности, модульности

Модули

методологический, гуманитарный, теоретический, прикладной, методический

Средства

Содержание

Государственный образовательный стандарт школьного и вузовского образования, учебный план, учебные программы, учебные элементы и материалы

Формы

фронтальная, групповая, индивидуальная, коллективная

Теории

ассоциативно-рефлекторная, поэтапного формирования действий, информационные

Методы

наглядного моделирования в обучении, эвристический, модульный

Условия

Модель содержания математического образования (целостный объект)

Условия (факторы, закономерности, связи)

Педагогические

технологические

технология наглядного моделирования в обучении математике, моделирование, принципы отбора учебного материала, диагностируемое целеполагание, фундирование математической подготовки

методические

приоритет теории по отношению к практике, наличие курсов по выбору, факультативов, преемственность школьного и вузовского курсов математического образования, концепция наглядного моделирования в обучении, концептуальность

Психологические

мотивационные

развитие познавательных мотивов, профессионально-педагогические мотивы, развитие личности, потребность самообразования и творческой деятельности

перцептивно-мнемические

развитие навыков мышления сенсорно-перцептивных механизмов адекватного отражения, мнемических способов, дифференциация, самообразование и рефлексия

Результаты

Значимость теоретической подготовки в системах математического образования неоднократно подчеркивалась в работах В. В. Давыдова, Л. В. Занкова, Л. М. Фридмана, Г. Д. Глейзера, В. Г. Болтянского, Н. Г. Салминой, Г. Л. Луканкина, А. Г. Мордковича, В. А. Гусева и др.

Известный математик и методист А. И. Маркушевич считал, что одной из главнейших задач обучения математике является формирование теоретических основ научного мировоззрения обучаемых, он подчеркивал, что “каждый учитель в отдельности должен использовать все средства своего предмета, чтобы передать учащимся максимально глубокие знания с учетом возраста, делая свое изложение доступным, интересным, даже волнующим детей, воздействующим на их разум и на их чувства” [118].

Математические аспекты проектирования теоретического содержания математического образования достаточно полно освещены в психологических исследованиях. “Всю систему обучения необходимо переориентировать с формирования у детей рассудочно-эмпирического мышления на развитие у них современного научно-теоретического мышления” [58]. Тем более велика роль формирования теоретического мышления у будущих учителей математики, когда само содержание и форма математических знаний обуславливают выполнение основных математических операций: сравнения, анализа и синтеза, абстракции, обобщения и конкретизации. В зависимости от связи между чувственными и отвлеченными элементами различают три вида мышления: наглядно-действенное, наглядно-образное и теоретическое. Теоретическое мышление физиологически естественно для студенческого возраста и совершается оперированием идеальными элементами (понятиями, рассуждениями, умозаключениями и т.п.). В то же время актуальным остается положение Л.С.Выготского о том, “что процессы развития идут вслед за процессом обучения, создающим зоны ближайшего развития” [47].

М. Дональдсон [61] выделяет следующие условия, способствующие формированию теоретического мышления:

– никакой формальной системой нельзя овладеть, не научившись хотя бы немного выходить за рамки конкретики;

– необходимо направлять мыслительные процессы на самих себя, не просто говорить, а отбирать то, что собираешься сказать, не просто интерпретировать, а сравнивать интерпретации;

– развивать в себе способность задержать внешнее действие и переключить внимание на умственные действия.

Именно этот момент способствует осознанию внутренних действий:

– саморефлексии своих умственных действий;

– владению планирующей деятельностью.

Далее можно упомянуть теорию развивающего обучения Л. В. Занкова (один из принципов – приоритет теории) [68]; теорию В. В. Давыдова (признаки теоретического мышления – обобщенность, рефлексия, внутренний план действий), когда основу теоретического обобщения составляет всеобщая (существенная) связь, выступающая в роли генетической исходной основы для всех частных проявлений [58]; развитие теории ориентировочной основы умственных действий П. Я. Гальперина и Н. Ф. Талызиной (III тип ориентировки – моделирования обобщенных ориентированных основ действий) [51].

Принцип фундаментализации (теоретического обобщения) для определения содержания и структуры математического образования будущих учителей математики неоднократно использовался в педагогических исследованиях проблем высшей школы. Этот вопрос обсуждался в докторских диссертациях А. Г. Мордковича, В. А. Оганесяна, Г. Л. Луканкина, Г. Г. Хамова и других.

Так, М. И. Шабунин (1994 г.) определяет содержание этого принципа требованием, чтобы:

а) математические понятия и методы решения задач имели достаточную степень обобщения, чтобы обеспечить широкие возможности их применения;

б) используемые математические понятия содержали точные определения, основные утверждения должны быть доказаны;

в) изложение материала было логически строгим, а последовательность его изучения согласована с потребностями смежных дисциплин;

г) курс математики заложил основы творческого применения полученных знаний для решения прикладных задач.

Все рассматриваемые выше подходы реализуют линейную схему моделирования теоретического знания (в соответствии с известным тезисом: от простого – к сложному, от знания неполного, неточного – к более полному, к более точному), тогда как содержание математического образования должно рассматриваться, в частности, как целостная система знаний, умений, навыков, методов, представляющая собой профессионально необходимое расширение школьного математического содержания.

Принципиальным отличием формулируемого принципа фундирования является определение основы для спиралевидной схемы моделирования базовых знаний, умений, навыков математической подготовки студентов педвузов. Если мы начнем со школьного предмета через послойное фундирование его в разных теоретических дисциплинах, то объем, содержание и структура математической подготовки должны претерпеть значительные изменения в направлении практической реализации теоретического обобщения школьного знания по принципу “бумеранга”. Например, возможна такая цепочка фундирования (см. рис. 15 на стр. 157).

Такое фундирование знаний выводит на уровень, когда уже педагог вместе со студентом, владеющим предметной стороной, начинает отрабатывать с ним методическую сторону преподавания. **Школьные знания станут выступать структурообразующим фактором, позволяющим отобрать теоретические знания из математики более высокого уровня, через которые происходит фундирование школьного знания.**

Другой слой фундирования может образовать при этом совершенствование и углубление практических умений, проектируемых ориентированной основой деятельности по типу описанной схемы.

По нашему мнению, педагогический процесс подготовки учителя естественно-научного профиля нужно рассматривать как формирование целостной системы профессионально-педагогической деятельности. На первом, профессиональном, этапе должны формироваться предметные знания и умения, предназначенные для формирования ближайшего видового обобщения базовых учебных элементов школьной математики, на втором этапе, фундаментализации, осуществляется их глубокое теоретическое обобщение, которое на третьем, методическом, этапе включается в структуру профессиональной деятельности как средство реализации учебно-воспитательных функций педагога. Чтобы включение обобщенных знаний происходило безболезненно, они должны быть организованы в форме, наиболее удобной для их освоения школьниками. Именно эту функцию перестройки освоения предметных знаний в соответствии с целями и задачами педагогической деятельности выполняет фундирование и наглядное моделирование. Структурообразующим фактором проектируемой дидактической системы профессиональной подготовки учителя естественно-научного профиля является концепция фундирования, разработанная В. Д. Шадриковым и Е. И. Смирновым [156]. В связи с выявленными тенденциями было предложено углубить теоретическую и практическую составляющие математического образования будущего учителя естественно-научного профиля, изменив содержание и структуру естественно-научной и методической подготовки в направлении усиления школьного компонента естественно-научного образования с последующим фундированием знаний и опыта личности на разных уровнях.

Таким образом, рассматривая подготовку учителя в системе высшего педагогического образования не только в практическом и теоретическом, но и в методологическом планах, и обращая особое внимание на возможность максимальной эффективности обучения для формирования профессиональных компетентностей и личностного развития студентов, и была разработана концепция фундирования опыта личности как эффективный механизм преодоления профессиональных кризисов становления учителя и актуализации интегративных связей между наукой, профессиональным образованием и школой (8 лет теоретической и экспериментальной проработки).

Фундирование – это процесс приобретения, освоения и преобразования опыта личности при создании механизмов и условий (психологических, педагогических, организационно-методических, материально-технических) для актуализации и интеграции базовых учебных элементов школьных и вузовских знаний и видов деятельности с последующим теоретическим обобщением и расширением практического опыта освоения структурных единиц, раскрывающих их сущность, целостность и трансдисциплинарные связи в направлении профессионализации знаний и вариативности индивидуального опыта, формирования профессиональных компетентностей будущего педагога.

Концепция фундирования опыта личности предполагает развертывание в процессе предметной подготовки студентов следующих компонентов:

– определение, анализ и механизмы реализации содержания уровней базовых школьных учебных элементов и видов деятельности (знания, умения, навыки, математические методы, идеи, алгоритмы и процедуры, содержательные линии, характеристики личностного опыта);

– определение, анализ и механизмы реализации содержания уровней и этапов (профессионального, фундаментального и технологического) развертывания базовых вузовских учебных элементов и видов деятельности в направлении “школа-вуз-школа”;

– определение и реализация технологии фундирования с учетом проектирования индивидуальных образовательных траекторий и развития самостоятельности студентов как основы конкурентоспособности на рынке труда (диагностируемое целеполагание, наглядное моделирование уровней глобальной структуры преемственности, локальной модельности видового освоения, механизмы управления познавательной и творческой деятельностью студентов, дидактические модули, блоки формирования профессиональной мотивации в освоении базовых учебных элементов и видов деятельности, вариативность способов решения педагогических и учебных задач);

– определение и механизмы методической адекватности обеспечения преемственности базовых школьных и вузовских (фундированных) учебных элементов и видов деятельности на основе современных методологических принципов и концепций.

Формирование и развитие компетентностей профессиональной деятельности студентов педагогического вуза связано как с динамичными изменениями в социальной жизни общества, так и с перестройкой системы профессионального образования, изменениями в образовательной системе. Следует так же отметить, что у части учителей не сформирована система значимых профессиональных компетентностей, следовательно, необходимо создать такую инновационную систему вузовского образования на единой концепции, которая бы являлась основой для формирования компетентностей будущего учителя, конкурентоспособности на рынке труда и успешности профессиональной деятельности учителя.

Новое качество профессиональных компетентностей будущего учителя, формируемых на основе концепции фундирования – это восприимчивость к реализации новых образовательных технологий, в том числе информационных, способность решать профессиональные задачи в условиях выбора и неопределенности, в контексте повышения уровня:

- профессиональной мотивации в учебной и внеучебной деятельности на основе всемерного развития самостоятельности;
- освоения интегративных связей академических и школьных знаний на генетической и вариативной основах;
- контрольно-диагностических компетентностей в оценке результатов учебной и обучающей деятельности;
- наглядного моделирования процессов, явлений и учебных элементов для понимания учебных задач и способов деятельности;

- предметных компетентностей в системогенезе (формирования знаний, умений, навыков, частных методов, алгоритмов и процедур, методов и технологий организации учеб-ной деятельности);
- компетентностей в принятии решений, в типичных и нетипичных педагогических ситуациях (исследовательское поведение);
- иноязычной коммуникационной компетентности студентов путем организации дополнительного образования на базе оснащения специальных кабинетов, аудиторий и классов, приобретения и создания учебно-методических материалов.

Фундирование как механизм и метод формирования нового качества профессиональных компетентностей будущего учителя характеризуется следующим компонентным составом:

1. *Освоение современных областей науки на основе выявления генезиса базовых учебных элементов и способов деятельности от истоков до настоящего состояния:*

– представленность, освоенность и генезис научного знания и приемов научной деятельности: нанотехнологии и фрактальная геометрия, информационно-коммуникационные технологии и вейвлеты, комплексность геоэкологического картографирования и геоинформационных систем, дистанционное зондирование экосистем, восприятие поликодовой информации и брендинговые модели в рекламе и др.;

– вскрытие историко-генетических оснований значимости базовых учебных элементов раздела науки в интегративной связи с дидактикой учебного предмета;

– реализация исследовательского подхода, в том числе проектного метода (с презентациями и использованием компьютерных технологий и мультимедиа) по широкому спектру современных достижений науки и возможностей применения в профессиональной деятельности;

– формирование элементов научного мышления и методологической культуры освоения элементов научного познания в решении учебных и профессиональных задач.

2. *Создание условий (психологических, педагогических, организационно-методических, материально-технических) для обеспечения целостности, иерархичности и уровневости, спиралевидности и направленности развертывания содержания профессионально-педагогической подготовки учителя в опоре на выделение и освоение базовых учебных элементов и приемов деятельности в единстве структурно-образующих компонентов:*

– развертывание целостной системы дидактических модулей содержания предметной подготовки (“риманова поверхность модуля”) со структурообразующим школьным компонентом;

– освоение содержания дидактического модуля учебного предмета в единстве теоретического, практического, прикладного, эвристического, конкретно деятельностного и школьного компонентов;

– выделение, обоснование и освоение базовых учебных элементов школьного (довузовского предметного опыта) и вузовских учебных элементов с последующим теоретическим обобщением и практическим расширением структурных единиц, раскрывающих их сущность, целостность, вариативность, сквозные и трансдисциплинарные связи.

3. *Преемственность содержательных линий школьного и вузовского предметного образования и вариативность способов решения педагогических и учебных задач на уровне трансдисциплинарных взаимодействий:*

– определение содержания (фундаментального и технологического) уровней и этапов развертывания базовых школьных учебных элементов и приемов деятельности (довузовского предметного опыта) в вузовском учебном предмете (знания, умения, навыки, частно-предметные методы, идеи, алгоритмы и процедуры);

– проектирование взаимопереходов знаково-символической деятельности (вербальной, логической, наглядно-образной, наглядно-действенной) в дидактическом анализе базовых учебных элементов и действий;

– актуализация передового педагогического опыта предметной деятельности в интерактивном режиме с использованием ИКТ адекватно педагогическим целям и задачам;

– интеграция содержания, приемов и методов освоения школьного и вузовского учебного материала, трансдисциплинарных взаимодействий на уровне связей, системной интеграции и содержательно-процессуального симбиоза.

4. *Создание условий (психологических, педагогических, организационно-методических, материально-технических) для развития креативности, поисковой и творческой активности студентов в решении учебных и профессионально-ориентированных задач, в том числе с использованием ИКТ:*

– освоение научного и педагогического знания в его новейших проявлениях с использованием информационно-коммуникационных технологий, ресурсов телекоммуникаций, глобальных и локальных информационных сетей, и в интегративной связи со школьным знанием и приемами деятельности;

– создание и освоение новых учебно-лабораторных комплексов, специальных курсов, учебных дисциплин и методических материалов, форм организации учебной и научной деятельности студентов на стыке моделирования-практики, новейших теорий – технологий-средств и интеграции наук, в том числе с использованием ИКТ для интересов региона и корпоративного сектора;

– творческое освоение практико-ориентированного поля будущей профессиональной деятельности: зондирование экосистемы и инженерно-экологические изыскания; полевые и фольклорные, вычислительные и технологические, педагогические практики; создание банков информации с помощью ИКТ (диалектный материал, карты Атласа говоров, геологические карты, технологический цикл подготовки и изготовления издательской продукции на современном техническом уровне, подготовка рекламных проектов и анализ готовых рекламных продуктов и др.

Принципиальным отличием структурообразующего принципа фундирования является определение основы для спиралевидной схемы моделирования базовых знаний, умений, навыков естественно-научной (в том числе, математической) подготовки студентов педвузов. Начиная со школьного предмета через послойное фундирование его в разных теоретических дисциплинах, объем, содержание и структура естественнонаучной подготовки должны претерпеть значительные изменения в направлении практической реализации теоретического обобщения школьного знания по принципу “бумеранга”. Такое фундирование знаний выводит на уровень, когда педагог вместе со студентом, уже владеющим предметной стороной, начинает отрабатывать методическую сторону преподавания. Школьные знания станут выступать структурообразующим фактором, позволяющим отобрать теоретические знания из естествознания более высокого уровня, через которые происходит фундирование школьного знания. Другой слой фундирования может образовать совершенствование и углубление практических умений, постановки эксперимента, исследовательского поведения студентов, проектируемых ориентировочной основной учебной деятельности. Целостность и направленность проектируемой дидактической системе придает развертывание спиралей фундирования базовых школьных учебных элементов (БУЭШ) посредством построения родового теоретического обобщения и технологического осмысления видовых его проявлений.

В основе инновационного подхода к отбору содержания предметной подготовки учителя естественно-научного профиля лежит овладение когнитивным стилем профессиональной деятельности посредством актуализации субъективного опыта в процессе освоения теоретического обобщения БУЭШ на базе процессов фундирования и наглядного моделирования.

Педагогическая технология представляет собой существо совместной деятельности преподавателя и студента, ведущих к достижению планируемых результатов обучения на основе реализации научно обоснованных регулятивных правил и этапов деятельности. В то же время методическое оформление сути технологического процесса придает технологии гибкость и конкретность, и определяется, в частности, как содержанием и динамикой развертывания учебной информации, так и педагогическим мастерством преподавателя и особенностями личностного развития ученика.

Выделим в педагогическом процессе обучения естественно-научным дисциплинам три процессуальных компонента: учебную деятельность, обучающую деятельность и взаимодействие. Особое внимание будем уделять проектированию и организации деятельности студентов. Существенным при этом является то, что обучающая деятельность опосредована учебной деятельностью, активностью и личностными качествами студента и направлена на всестороннее развитие личности в соответствии с профессиональными задачами на основе центрирования личности в учебном процессе и личностно-ориентированного подхода. Учебная деятельность при этом предполагает развертывание процессов (в соответствии с динамической структурой личности К. К. Платонова) в трех обозначенных выше направлениях (на примере учебного предмета “математика”):

В деятельностном аспекте педагогического процесса реализация принципа фундирования приобретает спиралевидный характер, это соответствует диалектическому пониманию развития системы знаний.

Реализация рассматриваемого принципа фундирования в педагогической системе математического образования должна осуществляться в следующих компонентах содержания образования:

– учебном плане предметного блока Государственного образовательного стандарта;

– учебных программах (образовательно-профессиональных программах) математических дисциплин;

– теоретических и практических материалах учебных дисциплин, отражающих содержание учебных дисциплин;

– методологическом и методическом обеспечении преподавания математики.

База данных, структура и знаково-символическая формализация спиралей фундирования базовых единиц учебного материала определяются концепцией наглядного моделирования в обучении математике.

Проектирование **прикладного модуля** целостной дидактической системы математического образования будущего учителя математики определяется следующими задачами:

– обеспечение мотивацией развертывания спиралей фундирования блоками прикладных задач;

– конкретизация теоретических знаний – как необходимый компонент фундирования практического умения;

– фундирование практического умения по спирали: умение – навык;

– научный ретроспективный взгляд на школьную математику;

– решение прикладных задач естествознания и смежных наук;

– конкретизация как наглядно-модельная иллюстрация теоретических знаний;

– конкретизация как методическая функция теоретического знания;

– конкретизация как исследовательская функция нового теоретического знания;

– конкретизация теоретических знаний (понятий, теорем, алгоритмов и т.п.) достаточным количеством частных проявлений как фактор усвоения.

Формирование практических умений (прежде всего решение математических задач) как прикладной аспект (освоения) теоретических знаний является необходимым и существенным этапом объективизации знаний, критерием качества усвоения знаний, компонентом структурной наглядности, фактором осуществления межпредметных связей в математике.

К. К. Платонов [155], И. Я. Лернер [106] и др., рассматривая понятие “умение”, указывают на успешность действий или деятельности, на его продуктивность. Умения должны характеризовать наиболее значимые для предмета виды деятельности, успешное формирование которых обеспечивается необходимыми дидактическими условиями. Л. М. Фридман [237] отмечает, что умения характеризуют деятельность обучаемого и являются сознательным применением имеющихся у ученика знаний и навыков для выполнения сложных действий в различных условиях, т.е. для решения соответствующих задач. В. А. Крутецкий [98], характеризуя различия между умениями, навыками и способностями, отмечает: “При анализе способностей всегда имеют в виду качества, особенности человека, выполняющего ту или иную деятельность, а при анализе умений и навыков – качества, особенности деятельности, которую осуществляет человек”.

Умения группируются по различным основаниям: предметно-содержательному; степени самостоятельности; по виду деятельности – теоретической, практической; характеру психического процесса и т.п. Над этой проблемой работали Ю. К. Бабанский [13], И. Я. Лернер [98], Н. А. Лошкарева [112], В. С. Цетлин [243], Т. И. Шамова [249] и др. Специальные умения неразрывно связаны со знаниями по определенному предмету. Общеучебные умения формируются во всех учебных предметах. К числу интеллектуальных умений чаще всего относят умение овладевать мыслительными операциями, умение решать задачи. Сущность умений учебного труда исследователи видят в самоорганизации и саморегуляции учебной деятельности, в самоуправлении ею.

Учитывая вышесказанное, для уточнения учебного содержания необходимо выделить перечень умений, соответствующих уже фиксированному множеству объектов изучения. Однако перечень умений недостаточен для описания учебной деятельности. Необходимо учесть и такие признаки, как ее самостоятельность, продуктивность, направленность на учебный материал, степень сложности. В связи с этим выделяют уровни учебной деятельности. Этой проблеме посвящены труды В. П. Беспалько [22], И. Я. Лернера [98], М. И. Махмутова [122], П. И. Пидкасистого [154] и др. Чаще всего в дидактике выделяют три уровня усвоения:

– распознавание и воспроизведение знаний;

– применение знаний в знакомых (аналогичных изученному) ситуациях;

– применение знаний в незнакомых ситуациях, требующих проявления элементов творческой деятельности.

Один из путей формирования целостного представления о математических понятиях – это целенаправленное решение математических задач посредством опоры на устойчивые ассоциации (наглядное моделирование в обучении). Любая математическая задача (особенно учебного характера) предполагает один или несколько вариантов ее решения, опирающихся на четко обозначенный метод или даже алгоритм решения. Даже не будучи сообщенными заранее для обучаемого, они, тем не менее, являются исходным материалом для квазиисследовательской деятельности разных уровней.

Следуя Ю. М. Колягину и А. Г. Мордковичу, выделим следующие основные функции математических задач в обучении в педвузе:

– обучающая (направленная на формирование системы математических знаний, умений, навыков);

– развивающая (направленная на развитие математического мышления);

– воспитывающая (направленная на формирование научного мировоззрения, познавательного интереса, творческой активности, самостоятельности, качеств личности);

– контролирующая (связанная с проверкой качества усвоения изучаемого материала);

– методическая (направленная на освоение профессионально-предметных действий).

Естественно типологизировать практические умения по предметно-содержательному принципу следующим перечнем: общеучебные, сквозные, формирующие, методические, модельно-прикладные. К общеучебным умениям будущих учителей математики отнесем: вычислительные, алгоритмические, тождественных преобразований, геометрических построений, информационные и т.п. Общеучебные умения являются краеугольным камнем математической культуры учителя математики и формируются непрерывно на протяжении всех лет обучения математике. Диагностируемое целеполагание общеучебных умений позволяет технологизировать процесс их формирования.

Сквозные практические умения сопровождают весь процесс изучения учебного предмета или его существенного этапа и конкретизируют базовое теоретическое знание: дифференцирование, интегрирование, вычисление сумм числовых и функциональных рядов, решение дифференциальных уравнений и т.д. Сквозные практические умения претерпевают в своем генезисе развитие в соответствии с теорией П. Я. Гальперина [51] ориентировками I, II, III типов, достигая своего обобщения в виде модели ориентировки III типа. Например, возьмем базовое понятие – предел функции. Следующая схема реализует последовательность этапов обобщения:

Схема 8

Причем III уровень ориентировки достижим на каждом этапе и сам претерпевает качественные изменения. Так, рассмотрим реализацию этой идеи на примере “второго замечательного” предела:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

($e = 2,71828...$ – число Эйлера).

Студенту предлагается сначала неполная ориентировочная основа действий решения примеров типа

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n, \quad (a \in \mathbf{R}).$$

Несложные алгебраические преобразования и элементарная теорема о пределе степенно-показательного выражения позволяют, используя основной предел, найти результат – e^a. Но ООД явно неполная, и студенту предлагаются примеры типа

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_0n^k + ... + a_k}{b_0n^k + ... + b_k}\right)^n$$

($a_0 = b_0,\ a_i, b_i \in \mathbf{R}\ (i = 1, 2, ..., k)$), которые решаются аналогично, но с более сложными алгебраическими выкладками и соответствующими элементарными теоремами. Несмотря на качественное разнообразие возникающих примеров (можно даже заменить показатель n на любую бесконечно большую величину $\beta(n) \to \infty$ при $n \to \infty$), студент оказывается в затруднении при решении, например, такого примера:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{n}+1}{\sqrt[3]{n}+3}\right)^{\sqrt{n+1}}.$$

Дело в том, что либо методом варьирования и создания проблемной ситуации, либо прямым указанием ориентировочной основы действий III типа преподаватель актуализирует обобщение: все примеры рассматриваемого типа задают неопределенность вида (1^{∞}) и решаются следующей полной ООД:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}[f(n)]^{g(n)} = (1^{\infty}) =$ $\qquad (f(n) \neq 1)$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}[1+f(n)-1]^{g(n)} = (1^{\infty}) =$ $\qquad (\exists \lim\limits_{n\to\infty} g(n)([f(n)]-1))$
3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{\frac{1}{f(n)-1}}\right]^{\frac{g(n)}{f(n)-1}\cdot(f(n)-1)} =$
4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\left[1+\frac{1}{\frac{1}{f(n)-1}}\right]^{\frac{1}{f(n)-1}}\right)^{g(n)[f(n)-1]} =$
5. $\displaystyle\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{f(n)-1}}\right)^{\frac{1}{f(n)-1}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty} g(n)[f(n)-1]} =$
6. $e^{\lim\limits_{n\to\infty} g(n)[f(n)-1]}$.

Следует отметить, что не менее важен в математическом образовании учителя и другой путь реализации практических умений – вариативность решения математических задач.

Целеполагание **гуманитарного модуля** определяется концепцией личностно-ориентированного обучения, когда допускается множество динамически меняющихся, развивающихся в процессе обучения целей [177], достижение которых предполагает творческий поиск, вариативность, сознательный выбор, мотивационное обеспечение деятельности, самостоятельность и развитие личностных качеств. Теоретическими предпосылками современной концепции личностно-ориентированного обучения являются фундаментальные исследования о структуре личности, механизмах ее развития, личностных функциях и способностях, отраженные в работах Б. М. Теплова, В. В. Краевского, В. В. Давыдова, В. Д. Шадрикова, И. Я. Лернера, А. П. Тряпицыной, В. В. Серикова, Н. В. Бочкиной и др.

Н. Л. Стефанова [217] отмечает, что гуманизация системы профессионально-педагогического образования как целенаправленный процесс уже сейчас осуществляется в двух направлениях: через создание условий для формирования гуманистического профессионального сознания учителя и адекватной ему технологии обучения; через построение самой системы профессионального образования и подготовки учителя как личностно-ориентированный. К этому следует, видимо, добавить третье направление: создание условий для саморазвития, самоактуализации, самореализации личности студента в процессе обучения математике.

К условиям, определяющим первое направление, следует отнести: формирование множества динамически меняющихся, развивающихся в процессе обучения математике целей; выделение гуманитарных аспектов математического содержания (мотивационных, операциональных, социальных, вариативных, воспитательных, функциональных); моделирование приемов знаково-символической деятельности, реализующих гуманистическую идеологию и освоение соответствующей ООД; широкое использование информационных технологий обучения через рациональное соединение личностного, информационного, эмоционального и др. аспектов; профессиональная компетентность будущего учителя математики.

К условиям, определяющим второе направление, следует отнести: предпочтительно модульное построение структуры математического содержания с наличием в каждом модуле (обучающей или деятельностном) вариативной части; преодоление выявленного в настоящем исследовании разрыва между учебными и профессиональными мотивами, между школьным математическим содержанием и вузовской математикой I курса (констатирующий эксперимент, глава I, §2); целеполагание уровней усвоения и контроля математического содержания, диверсификация образовательных и профессиональных достижений студентов.

К условиям, определяющим третье направление, следует отнести: индивидуализацию обучения математике через широкое использование компьютерных технологий; систематическое внедрение элементов когнитивной визуализации в процессе управления познавательной деятельностью студентов; обеспечение взаимопереходов знаково-символических систем (речь, формализованные математические объекты); создание ситуаций “интеллектуального затруднения”, побуждений к творческой активности, коммуникативной деятельности, поощрение критичности, инициативности и рефлексии.

2.2. Теоретические и методические принципы и критерии отбора содержания, методов и средств математической подготовки студентов педвузов

При формировании целеполагания педагогического процесса математического образования студентов педвузов мы исходили из объективных факторов (макроситуация, социальный заказ общества, Государственный образовательный стандарт школьного образования и т.п.), общедидактических принципов обучения математике (научности, доступности, наглядности, преемственности и т.д.), задач ассоциативного и когнитивного научения, в том числе необходимости формирования базового уровня предметных знаний, умений, навыков и методов, задач воспитания и развития. Эти факторы определяются в любой педагогической системе обучения, поэтому необходимо указать специфические особенности целеполагания дидактической системы математического образования, и прежде всего концептуальные принципы и методы отбора содержания, методов и средств математической подготовки будущего учителя математики. Эти проблемы на общетеоретическом уровне исследовались в работах С. И. Архангельского, В. И. Загвязинского, А. М. Сохора, В. С. Леднева, И. А. Рейнгарда и др.; применительно к математике в педагогическом вузе в работах Н. Я. Виленкина, В. Л. Матросова, А. Г. Мордковича, Г. Л. Луканкина, В. А. Гусева, М. И. Шабунина, Ю. В. Сидорова, Г. Г. Хамова, Н. Л. Стефановой, В. А. Тестова и др.

Рассмотрим набор критериев отбора содержания методов и средств математического образования в свете сформулированных концептуальных принципов, обеспечивающих оптимальное сочетание требований к основам профессиональной подготовки будущего учителя математики. При разработке соответствующих критериев были использованы исследования В. А. Оганесяна [145] по методу обобщенных критериев: критерий дидактической значимости, критерий методологической значимости, критерий полноты и др.

Мы выделяем следующие критерии:

– единства учебного материала и содержательных линий;

– базовости знаний, умений, навыков и методов школьной и вузовской математики;

– логической спирали развертывания содержания учебных элементов;

– обобщенности, полноты и оптимальности дидактического анализа учебных элементов;

– бинарности (теоретической и методической линий).

Реализация критериев осуществляется на основе наглядного моделирования процессов фундирования базовых учебных элементов математического образования будущих учителей математики.

Рассмотрим реализацию каждого из выбранных критериев.

1. Образовательная область (учебный предмет) “математика” применительно к основной и старшей школе традиционно преподается как учебные курсы (дисциплины): алгебра (алгебра и начала анализа) и геометрия. Проблема изучения начал анализа в средней школе дискутируется более века: содержание, уровень строгости и доказательности, практических умений и навыков, прикладные аспекты и т.п., – и в настоящее время элементы математического анализа вошли в содержание школьного математического образования. Государственным образовательным стандартом определены **5 содержательных линий школьного курса** математики: числовая, функциональная, геометрическая, тождественных преобразований, уравнений и неравенств. Такая структуризация учебного материала позволяет выделить исходные объекты фундирования:

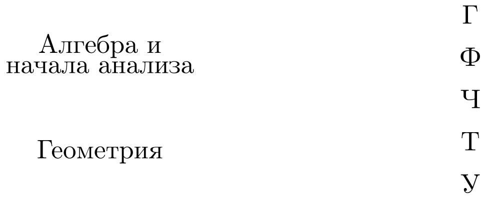


Рис. 11

К данному перечню необходимо присоединить **стохастическую линию**, необходимость введения которой в школьный курс математики активно обсуждается и частично реализуется в последние годы, и **алгоритмическую линию**, связанную с методологическими основами информатизации учебного процесса. Таким образом, мы имеем полную картину исходного уровня фундирования:

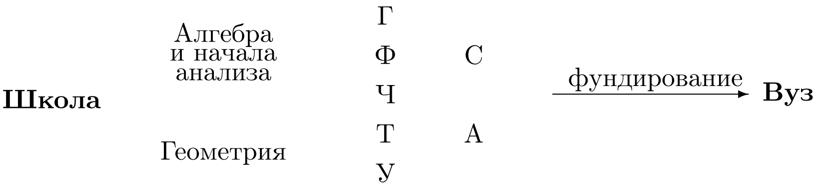


Рис. 12

Каждая содержательная линия определяет базовые знания, умения, навыки и методы, распределенные по оптимальному набору учебных предметов вуза. Преемственность учебных предметов определяется через (и посредством) содержательных линий:

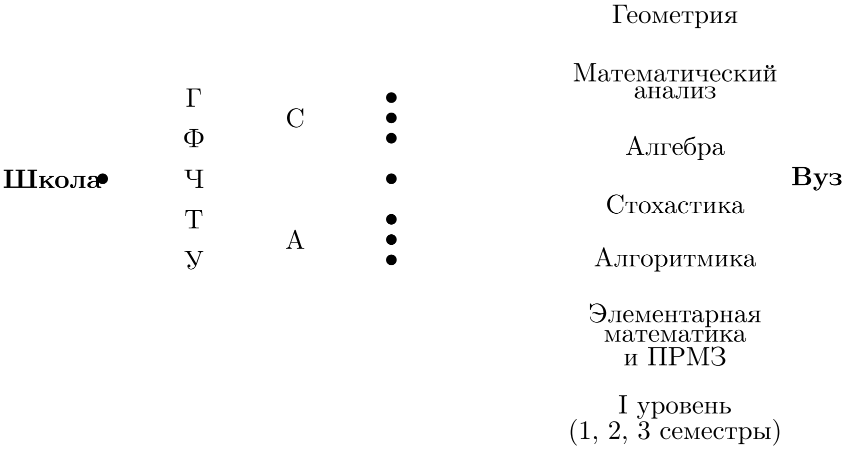


Рис. 13

Данный перечень учебных предметов образует первый уровень фундирования и является базовым. Каждый учебный предмет определяет набор учебных дисциплин, включая теория и методику обучения предмету на весь период математического образования, например:

Таблица 7

Учебный предмет	**Учебные дисциплины**
Математический анализ	1. Дифференциальное и интегральное исчисление 1 переменного. 2. Дифференциальное и интегральное исчисление нескольких переменных. 3. Ряды. 4. Дифференциальные уравнения. 5. Теория функций действительного и комплексного переменного. 6. Теория и методика обучения математическому анализу.

Второй уровень (5, 6, 7 семестры) определяет содержание и уровень теоретического обобщения (фундирования), III уровень – методического обоснования (8, 9, 10 семестры). На II уровне добавляется учебный предмет – теория и методика обучения математике, математическая логика, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы и математическое моделирование, на III уровне – история математики и математического образования со своим перечнем учебных дисциплин, спецкурсы и спецсеминары, факультативы и педагогические практики.

Уровневая динамика учебных предметов и дисциплин представлена в следующей таблице.

Таблица 8

Уровневая динамика учебных предметов и дисциплин

○ – учебный предмет

☐ – учебная дисциплина

I уровень профессиональный	II уровень фундирования	III уровень технологический
I–IV сем.	V–VII сем.	VIII–X сем.

○Элементарная математика и ПРМЗ

☐Элементарная математика ☐ПРМЗ	☐Элементарная математика ☐ПРМЗ	☐Методика обучения математике

математика ☐ПРМЗ	математика ☐ПРМЗ	☐Спецкурсы, семинары, факультативы по выбору ☐История математики и математического образования

○**Математический анализ**

☐Дифференциальное и интегральное исчисление 1 переменного	☐Функции нескольких переменных ☐Ряды ☐Дифференциальные уравнения ☐Теория функций	☐Методика МА ☐Спецкурсы, факультативы по выбору ☐История математики

○**Алгебра**

☐Алгебраические структуры ☐Теория систем ☐Векторные пространства ☐Теория чисел ☐Многочлены	☐Числовые системы	☐Методика алгебры ☐Спецкурсы, семинары, факультативы по выбору ☐История математики

○**Геометрия**

☐Планиметрия ☐Стереометрия ☐Преобразования и структура геометрии	☐Дифференциальная геометрия ☐Проективная геометрия	☐Методика геометрии ☐Спецкурсы, семинары, факультативы по выбору ☐История математики

○**Алгоритмика**

☐Алгоритмы ☐Алгоритмические языки ☐Алгоритмы и математика	☐Математическое моделирование и численные методы ☐Математическая логика	☐Методика алгоритмики ☐Спецкурсы, семинары, факультативы по выбору ☐История математики

○**Стохастика**

☐Комбинаторика ☐Случайные события (или введение в теорию вероятностей)	☐Теория вероятностей и математическая статистика ☐Энтропия и информация ☐Элементы теории игр	☐Методика стохастики ☐Спецкурсы, семинары, факультативы по выбору ☐История математики

Критерий базовости знаний, умений, навыков и методов предполагает выделение в школьном математическом содержании базовых (основных, ключевых) математических объектов как по учебным предметам, так и по 7 содержательным линиям, причем по 2 содержательным линиям: алгоритмической и стохастической – выделение базового учебного материала является оригинальным и соответствующим современным тенденциям развития школьного математического образования. Аналогично выделяется базовый учебный материал по учебным предметам I уровня вузовского математического образования при соблюдении **критерия полноты**, т.е. возможности логического расширения базового блока до полного содержания учебного предмета и возможности покрытия базового блока школьного математического образования.

Например, опорная таблица кодировки базового учебного материала I уровня по курсу “Дифференциальное и интегральное исчисление функций одного действительного переменного” приведена на с. 279.

В таблице приведены кодировки базовых процедур, основных теорем (содержательная, конструктивная, техническая), базовых умений и навыков. Существенным моментом является полное включение базовых школьных знаний в вузовский перечень учебных элементов и перевод их из базы данных (формальное оперирование в школьной математике) в базу знаний (осознание и деятельность на уровне сущности).

Итак, в соответствии с **критериями полноты и оптимальности** базовые знания, умения, навыки, методы школьной математики становятся исходным звеном содержания учебных предметов I уровня; одна из задач учебного предмета “Элементарная математика” – **обоснование преемственности трактовки базовых учебных действий в школе и вузе.**

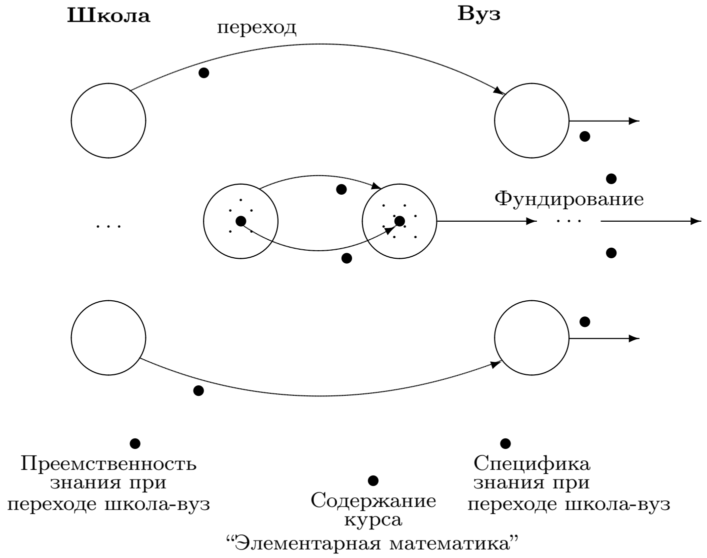


Рис. 14

Будем рассматривать три компонента процесса фундирования базового учебного элемента школьной математики (БУЭШМ): глобальный, локальный и модульный. Основанием для типологии фундирования является степень развернутости спиралевидного процесса и различие в целеполагании.

Учебный предмет, представляя собой целостную структуру учебной информации в составе теоретического, практического, прикладного, деятельностного, эвристического и гуманитарного компонентов, разворачивается в базисном (содержательном), процессуальном и иерархическом уровнях в своих локальных, модульных и глобальных проявлениях.

В развертывании содержания учебного предмета в контексте профессионализации фундирования БУЭШМ с особой отчетливостью прослеживаются три линии:

– логика определения содержания учебного предмета, исходя из его особенностей: отбор базовых учебных элементов, структуры, этапы изучения, интегративные знания, соотношение теоретического и практического компонентов и т.п.;

– логика преемственности и содержания теоретического обобщения БУЭШМ: содержательные линии школьной математики и набор учебных предметов вузовского обучения, построение системы логически взаимосвязанных видовых проявлений базовых родовых понятий, усиление прикладного и деятельностного компонентов обучения математике, модульный принцип развертывания содержания учебного предмета и т.п.;

– учет психологических и педагогических особенностей восприятия, усвоения, представления, применения, анализа и синтеза учебного материала субъектом обучения: наглядное моделирование, имитационное моделирование, структурный анализ базовых учебных элементов, усиление эвристического и гуманитарного компонентов, развитие интеллектуальных и личностных характеристик, вариативность решения учебных задач, взаимопереходы знаковых систем и т.п.

Осмысление математического объекта как педагогической задачи в когнитивном процессе логически проявляется в структуре спирали фундирования учебного элемента на этапе методики ее изучения в школьной математике (**глобальное фундирование**).

Признаками глобального фундирования являются: развернутость учебной деятельности во времени (8–10 семестров); наличие существенной обобщенной связи в комплексе видовых проявлений учебного элемента; наглядное моделирование структуры видовых проявлений; наличие спиралевидной модели видовых взаимосвязей, где начальное звено представляет собой школьный учебный элемент; обязательное наличие теоретического обобщения, конечное звено представляет собой методическое осмысление начального звена; корреляция начального и конечного звена спирали.

Основная задача глобального фундирования школьного учебного элемента в вузовском дидактическом процессе обучения математике – создание целостного представления о слое профессионально ориентированных знаний, умений, навыков, математических методов, алгоритмов и процедур, упорядоченном в направлении теоретического обобщения школьного учебного элемента в контексте развертывания устойчивых профессионально-важных связей между видовыми проявлениями родового учебного элемента. При этом необходимо обеспечить максимальный развертывающий эффект средствами математики и сформировать устойчивый потенциал математической деятельности.

Структура глобального фундирования разворачивается по 6 базовым учебным предметам сквозного характера (в течение всех лет обучения): математический анализ, алгебра, геометрия, алгоритмика, стохастика, элементарная математика, которые продолжают и углубляют 7 содержательных линий школьной математики. Другой срез структуры образуют 3 слоя фундирования:

– **профессиональный** (I–III семестры), предназначенный для формирования ближайшего видового обобщения методом наглядного моделирования базовых учебных элементов школьной математики. Дело в том, что в зависимости от того, в какой мере усвоение понятия удовлетворяет критериям, определяются уровни его усвоения. Психологи Д. Н. Богоявленский, Н. А. Менчинская, М. Н. Шардаков различают четыре уровня. Первый характеризуется диффузно-рассеянным представлением о предмете, явлении. Для второго уровня характерным является то, что ученик уже может указать признаки понятий, но не может отделить существенные от несущественных. Для третьего уровня усвоения понятий характерным является то, что ученик усваивает все существенные признаки, но понятие оказывается еще скованным единичными образами, служившими опорами при формировании понятия. Понятие еще не обобщено. Четвертый уровень характеризуется тем, что понятие уже обобщено, усвоены существенные связи данного понятия с другими, благодаря чему ученик свободно оперирует понятием в решении различного рода задач. Возникает также необходимость в выделении еще более высокого (пятого) уровня усвоения понятия (А. В. Усова), характеризующегося установлением связи понятий, формируемых в разных учебных предметах.

Как правило, в школьной математике понятие доводится до второго уровня (то есть сообщается на "уровне данных" в отличие от "уровня знаний" [260]), и задача высшей школы заключается в том, чтобы достигнуть "уровня знаний" в различных видовых проявлениях родового понятия;

– **фундирования** (IV–VI семестры), предназначенный для освоения глубокого теоретического обобщения БУЭШМ. Этот путь согласуется с теорией В. В. Давыдова [58], который заметил, что "переход некоторого объекта в форму модели позволяет обнаружить в нем такие свойства, которые не появляются при непосредственном оперировании", и выделить триаду теоретического обобщения (внутренний план действий, рефлексия, теоретическое обобщение). Основу теоретического обобщения составляет всеобщая (существенная) связь, выступающая в роли генетической исходной основы для всех частных проявлений. Проверенная на практике более 20 лет теоретическая концепция В. В. Давыдова доказала свою высокую эффективность.

– **технологический** (VII–X семестры), предназначенный для освоения технологических приемов профессиональной деятельности и методического обоснования изучения БУЭШМ.

Особенности:

– сквозное развертывание учебных предметов,

– блочно-модульная структура,

– преемственность содержания школьного и вузовского обучения,

– приоритет принципов фундаментализации и профессионализации подготовки,

– усиление технологизации профессиональной подготовки.

Целостность и направленность проектируемой дидактической системе придает развертывание спиралей фундирования базовых школьных учебных элементов посредством построения родового теоретического обобщения и технологического осмысления видовых его проявлений.

Например, возможна такая цепочка фундирования:

Рис. 15. Схема фундирования школьного знания

В нашем примере необходимо построить теоретическое обобщение производной на уровне банаховых пространств. Пусть X, Y – банаховы пространства, $U \subset X$ – открытое множество в X, $f : U \longrightarrow Y$ и $x_0 \in U$. Говорят, что существует производная f' функции f в точке x_0, если выполнено условие (f' – линейный оператор из X в Y)

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(h),$$

где

$$\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{||h||} = 0.$$

Теперь, если $X = Y = \mathbf{R}$, то f' – одномерная производная (число); если $X = \mathbf{R}^n$, $Y = \mathbf{R}$, то $f' = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ – градиент функции f в точке x_0, а его компоненты – частные производные f по переменным; если $X = \mathbf{R}$, $Y = \mathbf{R}^n$, то f' – вектор-столбец производных компонентных функций; если $X = Y = \mathbf{C}$, то f' – комплексная производная (комплексное число); если $x = \mathbf{R}^n$, $y = \mathbf{R}^m$, то f' – матрица Якоби.

Существование производной f в точке $p_0 \in X$ означает нечто большее, чем просто существование особого вида действительного числа $\mathrm{tg}\ \alpha$, вектора $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$, комплексного числа (тоже вектора) $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, -\frac{\partial u}{\partial y}\right)$, матрицы Якоби $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)_{ij}$, линейного оператора $A : \Omega \longrightarrow Y$ $(p_0 \in \Omega)$. Это прежде всего возможность аппроксимации (приближения) функции f в окрестности точки p_0 линейным отображением. Сущность понятия производной заключена в самой возможности линеаризации функции в окрестности исследуемой точки.

Ценность данной модели фундирования (понятия производной на уровне “данных” до ее глубокого теоретического обобщения на уровне “сущности”) для учебного процесса в вузе и будущей профессиональной деятельности для студента-математика несомненна и должна найти определенное место в учебных программах математического анализа и авторских технологиях школьного обучения математике.

В то же время данная модель несет в единичном и особенном своем проявлении все основные черты теоретического знания о процессе фундирования базовых учебных элементов школьной математики. Создание системогенетического блока спиралей фундирования БУЭШМ позволяет определить устойчивое ядро содержания учебной информации, проектирующее элементы ориентировочной основы учебной деятельности студентов.

С другой стороны, проецирование теоретического обобщения (родовое понятие) на видовое разнообразие частных случаев в форме актуализированных практических приложений создает устойчивый мотивационный эффект в процессе усвоения школьного математического знания (в нашем примере – понятия производной).

Рис. 16. Схема видовых проявлений родового понятия

Значимость батареи спиралей фундирования по учебным предметам в глобальном аспекте может быть представлена в форме спецсеминара для студентов V курса “Технология фундирования базовых учебных элементов школьной математики”, а также в качестве основы для исследования в форме курсовых и выпускных квалификационных работ студентов.

Так как актуально сознается только то содержание, которое является предметом целенаправленной деятельности студента, то спирали фундирования должны быть представлены студентам на I курсе на уровне данных и познавательной мотивации. Для проектирования учебной деятельности, стимулирующей проблемность и познавательную мотивацию, необходимо сопроводить каждое звено спирали фундирования конкретными прикладными задачами и проблемами из предметных областей, определяющих материализацию познавательных мотиваций в глобальном аспекте. Соответствующая учебная деятельность может быть представлена при написании рефератов (историко-прикладного характера), на лекциях, организацией квазиисследовательской деятельности.

Но даже развернутая во времени и смоделированная спираль фундирования не будет нести позитивную познавательную и профессиональную компоненту будущей деятельности, если не спроектировать приемы и элементы учебной деятельности с I по IX семестры, проявляющие компонентный состав, структуру, особенности восприятия и понимания, стимулирующие мотивационную и эмоциональную сферы обучаемых, определяющие контрольно-коррекционные механизмы развертывания спиралей фундирования.

На схеме 9 приведены основные характеристики и критерии проявления их сущности для глобального компонента фундирования БУЭШМ.

Схема 9

Глобальное фундирование БУЭШМ

Этап **локального фундирования** является очень важным. Работа обучаемых с использованием формально-логического аппарата не всегда ведет к повышению уровня теоретического обобщения, главное – важна адекватность учебной деятельности формируемым знаниям. Обобщенность, гибкость оперирования знаниями поэтому зависит не только от уровня операционального развития личности, но и от предметно-специфических знаний, которые определяются структурой и способами формирования знаний.

Локальное фундирование

Основная задача локального фундирования – создание педагогических условий для целостного профессионально-ориентированного когнитивного процесса структурного анализа видового обобщения школьного учебного элемента. Когнитивный процесс локального фундирования длится в течение начального периода обучения (3–4 семестра) в рамках профессиональной ступени фундирования и предполагает приобретение, применение и преобразование опыта видового обобщения базового школьного учебного элемента. Основанием для проектирования структуры видового обобщения служит: таксономия учебных целей Б. Блума, типология уровней усвоения В. П. Беспалько, а также трехкомпонентная модель когнитивного процесса: любой когнитивный акт должен включать в себя приобретение, применение и преобразования опыта (В. Н. Дружинин).

Характерной особенностью структурного анализа видового обобщения служит взаимопереход когнитивных сфер: знаково-символической, вербальной, графической, тактильно-кинестетической и деятельностной (наглядно-действенной). Для этого необходимо смоделировать учебный элемент в соответствующей учебной деятельности. Например, для учебного элемента “производная” функции одного действительного переменного как видового обобщения школьного учебного элемента “производная” возможна следующая модель:

Рис. 17. Фрейм представления учебного элемента

Реализация локального фундирования (в том числе структурный анализ видового обобщения) в процессе обучения математике ведет к пониманию обучаемым существа (сущности) математического знания (явления, процесса) и затем к его освоению и усвоению в триаде: понимание + устойчивость + применение.

Каждая из деятельностей связана с активизацией соответствующих когнитивных структур мышления индивидуума, влияние которых на понимание существенных связей в объекте восприятия (в данном случае – в понятии “производная”) неоднократно подчеркивалось психологами. Так, психологическое исследование способов кодирования информации впервые было предпринято Дж. Брунером [35], который выделял три основных способа субъективного представления идеи в виде действия, наглядных образов и языковых знаков. Взаимодействие этих трех способов кодирования информации составляет одну из главных черт эффективности мыслительной деятельности индивидуума. Аналогичную мысль о том, что мышление обеспечивают три сферы переработки информации – знаково-словесная, образно-пространственная и тактильно-кинестетическая – неоднократно высказывали Л. М. Веккер, а также Н. Г. Салмина, М. Холодная и др.

Основные понятия и теоремы в процессе локального фундирования тщательно и всесторонне обсуждаются в совместной деятельности преподавателя (транслятора) и студента с целью достижения методом наглядного моделирования существенных связей учебного элемента и управляемых когнитивных процессов, приводящих к пониманию этой сущности: проводится структурный анализ по следующей схеме:

Рис. 18. Структурный анализ учебного элемента

Признаки локального фундирования

– целостность структурного анализа видового обобщения базового школьного учебного элемента; непосредственность и преемственность видового обобщения;

– выделение существенной связи в видовом обобщении школьного учебного элемента, по которой развертывается теоретическое обобщение;

– адекватность педагогических (дидактических) задач уровню интеллектуального развития студентов; формирование мыслительных действий в "зонах ближайшего развития" индивидуумов;

– выделение ментальных процедур, свойственных математической деятельности учителя, управляемое становление приемов мыслительной деятельности;

– взаимопереход знаковых систем (способов кодирования информации) в операциональной деятельности с математическим объектом.

На первом этапе локального фундирования школьного математического знания определяются существенные внутренние связи понятия (или теоремы), по которым должно будет развертываться теоретическое обобщение. При этом важно в свете профессиональной направленности создать педагогические условия для вариативности актуализации ближайшего видового проявления БУЭШМ. Например, для понятия "производной" это будут: скорость для вектор-функции $\vec{r}'(t_0)$; производная как предел разностного отношения; частная производная (все – по основному признаку: топологической близости разностного отношения) и условие дифференцируемости (по топологической близости линеаризации графика). Немаловажную роль может сыграть привлечение к активному анализу обучаемыми исторических подходов к введению понятия "производной" и установлению корреляции с актуализированными существенными связями (в данном случае – линеаризация и условие дифференцируемости). Визуализация поиска существенных связей показана на схеме:

Схема 10

Структурно-логическая схема генезиса теоретического обобщения понятия “производная“

Основная задача **модульного фундирования** – создание условий для формирования целостного представления о видовых проявлениях родового учебного элемента на фоне устойчивого развертывания структурного и методического анализа, адекватного БУЭШМ. В этом важную роль играют преемственность дидактических модулей и освоение расширяющихся фрагментов спирали фундирования БУЭШМ.

Например, для понятия производной необходимо обосновать переход от определения f' на основе погрешности разностного отношения $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ в средней школе к определению с использованием предельного перехода lim и $\varepsilon - \delta$-языка. Заполнение этих "переходов" между понятиями, теоремами, методами доказательств, ориентировочными основами деятельности – есть одна из задач курса "Элементарная математика".

2.3. Механизм осуществления внутреннего и внешнего мониторинга функционирования дидактической системы математического образования будущего учителя математики

2.3.1. Реализация экспериментального образовательного стандарта ВПО по специальности "математика"

Проектирование дидактической системы математического образования студентов-математиков и определение технологических параметров учебного процесса предполагает нацеленность на эффективное функционирование педагогического процесса, что определяется значимостью ее структурообразующих факторов: концепцией фундирования и наглядного моделирования в обучении математике, доминантой школьного математического знания, профессионально-педагогической направленностью математического образования и стимулированием творческой активности студентов в процессе профессиональной подготовки.

В связи с этим дидактическую систему математического образования студентов-математиков следует представить как сложный целостный процесс, включающий в себя личностные (перцептивные, мнемические, метакогнитивные, креативные и др.), процессуальные (педагогические и технологические, когнитивные и проектировочные, управленческие и социальные и др.) и содержательные компоненты в триаде: учитель – ученик – взаимодействие. Определение и развертывание содержания учебных предметов обусловлены объемом, содержанием и логикой проектирования спиралей фундирования базовых учебных элементов школьной математики посредством построения родового теоретического обобщения и технологического осмысления видовых его проявлений на основе наглядного моделирования на трех уровнях: глобальном, модульном и локальном.

В этом контексте проявляются особенности проектирования содержания предметного блока образовательного стандарта подготовки учителя математики:

- выделение в предметном блоке 7 базовых учебных предметов, развертывающихся соответственно 7 содержательным линиям школьной математики: числовой, функциональной, геометрической, тождественных преобразований, уравнений и неравенств, стохастической и алгоритмической. Данная конструкция реализует преемственность школьной и вузовской математики. В экспериментальном ГОС могут быть представлены следующие учебные предметы: математический анализ, алгебра, геометрия, алгоритмика, стохастика, элементарная математика и технологии профессионально-математической деятельности. Каждый из учебных предметов представляет собой целостный и направленный набор учебных дисциплин, развертывание которых определяется объемом, содержанием и логикой проектирования спиралей фундирования базовых учебных элементов школьной математики;
- введение учебного предмета “Стохастика” (математическая статистика + теория вероятностей + дискретная математика + конечные геометрии + теория игр);
- усиление профессионально-математической подготовки в цикле математических дисциплин; следует отметить введение целого ряда новых учебных дисциплин: история математического образования, единая математика в задачах, технологии обучения математике и др. Но даже в таких традиционных учебных предметах, как математический анализ, логика развертывания спиралей фундирования как элементов содержания образования определяет ряд новых разделов, таких, как производная Фреше, обобщенные функции и др., которые отсутствуют в обычных учебных программах;
- увеличение объема и переструктуризация содержания учебного предмета “Элементарная математика”. Объем часов увеличен на

третъ, курс становится системообразующим и центральным в формировании профессионально важных качеств будущего учителя математики. Его новая функция – обеспечить устойчивое и свободное владение (в том числе на теоретическом уровне) учебным материалом школьной математики на разных уровнях усвоения и мотивации.

В то же время будущий учитель математики должен быть способен к управлению педагогическим общением и учебным взаимодействием на основе фундирования и развития личностных качеств и культуры, профессиональной идентичности и самосовершенствования.

Целостное проектирование дидактических процессов математического образования будущих учителей математики невозможно без определения эффективного механизма отслеживания (мониторинга) функционирования дидактической системы и коррекции целеполагания и содержания обучения математике. Внутренний мониторинг определяется уровнем функционирования и степенью взаимодействия компонентов дидактической системы на основе отслеживания параметров, фиксирующих текущие количественные и качественные изменения. Будем рассматривать дидактические процессы в трех уровнях: субъект обучения (обучаемый), транслятор (вербальный, невербальный, ТСО, учебные пособия, мультимедиа и т.п.), содержание обучения. Каждый из этих уровней рассмотрения дидактических процессов проявляется в серии характеристик. Сформулируем основные критерии эффективности дидактической системы математического образования будущих учителей математики:

- уровень усвоения базового (школьного) математического знания (профессионально-предметный уровень);
- уровень усвоения базового фундаментального математического знания (фундаментальный уровень);
- уровень развития общеучебных и профессиональных умений, творческой активности студентов (общепрофессиональный уровень);
- уровень развития личностных качеств и интересов студентов (интеллектуальных, мотивационных, оценка черт личности) (уровень самореализации);
- уровень профессиональной идентичности личности (профессиональная самооценка, удовлетворенность профессией, взаимоотношениями, уровень тревожности и т.п.);

- уровень социализации и взаимодействия в процессе обучения математике.

Педагогический процесс профессиональной подготовки имеет своей конечной целью формирование личности учителя с заданными качествами, что обуславливает необходимость определения исходного состояния личности (опыт, типологические свойства, качества мышления, опыт эмоциональной и волевой деятельности). Поэтому конкретизация критериев в исходном состоянии личности и в динамике развертывания педагогического процесса обучения математике дает необходимый срез профессиональной готовности к учительскому труду. На стадии профессионального образования ведущим формальным критерием соответствия социальным требованиям является академическая успеваемость (по предметам математического, общекультурного и методического циклов, включая итоги педагогической практики), а ведущим содержательным показателем – уровень сформированности системы педагогической деятельности (структура предметных, методических знаний, умений, способностей, сформированность педагогической направленности) как основа готовности к профессии.

Ведущими формальными показателями соответствия учительской профессии субъективным требованиям выступают удовлетворенность учебной и будущей профессионально-педагогической деятельностью, отношение к себе, как к профессионалу и др. С содержательной стороны данный критерий оценивается также степенью принятия профессии и себя, как профессионала (реального или потенциального), а также тем, насколько различные аспекты деятельности становятся предметом удовлетворения потребностей, интересов, убеждений человека. В то же время в ходе поискового эксперимента нас интересовали ключевые вопросы совершенствования системы подготовки учителей в педагогическом вузе: какие изменения претерпевает личность и деятельность студентов в процессе обучения; какие новообразования возникают при этом; какую роль в процессе профессионального развития играет педагогическая практика и др.

Как показали результаты экспериментальной работы, функционирование дидактической системы математического образования приводит к устойчивому росту большинства показателей личностных и профессиональных качеств студентов. Методики проведения соответствующих замеров (“Ценностные ориентации” Рокича, “Опросник профессиональных предпочтений" Дж. Холланда, "Профессиональная оценка" Будасси, "Оценка уровня реактивной и личностной тревожности" Спилбергера-Ханина, анкета Н. Г. Рукавишниковой и др.), подбор измерителей качественных признаков, способы статистического анализа данных и корреляция с технологическими параметрами организации и управления познавательной деятельностью студентов создали психолого-диагностический комплекс мониторинга функционирования дидактической системы.

2.3.2. Транслятор

– выбор организационных форм, методов, средств, педагогических технологий;

– управление познавательной деятельностью студентов;

– оценивание результатов обучения, измерители и методы контроля.

К основным компонентам, характеризующим состав ориентировочной основы учебной деятельности студента, отнесем:

– базовые знания, умения, навыки, математические методы, процедуры и алгоритмы (ЗУНМА);

– база данных спиралей фундирования, оснащенных мотивационно-прикладными задачами;

– аннотированная учебная программа ЗУНМА, конкретизированная: а) по 3 уровням усвоения учебных элементов; б) по функциональным компонентам содержания (теоретический, практический, прикладной, деятельностный, эвристический, гуманитарный);

– историко-методическое оснащение базовых учебных элементов;

– основные компоненты, методика и измерители оценочной деятельности;

– интегративная экзаменационная программа.

Технологические компоненты ДМ

Структура и состав ориентировочной основы учебной деятельности студентов в освоении учебного предмета представлен в следующей последовательности технологических компонентов:

I. *Состав.*

– **Базовые знания,** умения, навыки, математические методы, алгоритмы и процедуры (для каждого **дидактического модуля**)

Рис. 19

Структура. Свернутое и закодированное содержание обучения в ОТК может развертываться также в четырех сферах:

– **исходные характеристики** как когнитивная основа для освоения нового социального опыта в рамках дидактического модуля (ДМ);

– **базовые характеристики** как проекция содержания АУП;

– **интегративные характеристики** как отражение свернутого результата освоения нового когнитивного опыта в рамках ДМ;

– **дидактические директивы** как комплекс правил и предписаний обобщенного характера, определяющих направления и процедуры по достижению учебных целей.

Основная функциональная роль ОТК состоит в содействии формированию устойчивых внутренних опор в ходе освоения учебного содержания.

Рис. 20

Следующие **дидактические правила (директивы)** отражают существо технологии наглядного моделирования и сквозные, универсальные, существенные требования к управлению базовыми учебными элементами.

Правило 1. Математическое знание должно рассматриваться в динамике взаимоперехода знаковых систем по возможности в четырех сферах: знаково-символической, вербальной, графической и деятельностной.

Правило 2. Математическое знание должно проявляться не менее чем в **10 конкретизациях** (**5 качественных**).

Правило 3. Математическое знание предполагает **логический анализ** содержания и формы.

Правило 4. Мотивационная сфера математического знания должна быть материализована 2–3 **модельными задачами** (в том числе для спиралей фундирования).

Правило 5. Математическое знание должно проявляться **как часть более общего целого** знания, в котором оно имеет свои особенности, ограничения и форму.

Правило 6. Математическое знание должно рассматриваться **в генезисе** своего становления, во взаимосвязи с историческим аспектом формы и содержания.

Правило 7. Математическое знание должно иметь форму представления посредством **числа (действительного или комплексного), геометрической фигуры, конкретного действия**.

II. *Состав.*

База данных **спиралей фундирования,** оснащенных мотивационно-прикладными задачами (СФ). Компонентный состав и структура спирали фундирования базового учебного элемента представлены во фреймовой форме на следующем рисунке:

Рис. 21. Фрейм представления теоретического обобщения школьного знания (спираль фундирования)

Структура.

	Банк спиралей	Σ
1	Понятия	6–7
2	Теоремы	4–5
3	Алгоритмы	3–4
4	Процедуры	2–3

Банк мотивационных задач
По 1–2 на каждый компонент

Схема динамики освоения СФ *)

ДМ \ N	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

*) Образец по понятиям (или теоремам), трансдисциплинарным внутрипредметным спиралям

Рис. 22

III. *Состав.*

– **Аннотированная учебная программа** (АУП)

Рис. 23

Структура.

Компоненты: *) теоретический (Т), прикладной (П), практический (ПК), эвристический (Э), деятельностный (Д), гуманитарный (Г)

Рис. 24

IV. *Состав.*

– **Интегративная экзаменационная программа** (ИЭП)

Общая схема структурирования интегративных учебных элементов из аннотированной учебной программы показана ниже:

Рис. 25

Реализация целей и задач учебной деятельности студентов всецело определяется требованиями к средствам управления их познавательной деятельностью: методическими приемами, дидактическими правилами, образцами деятельности, материальными и информационными ресурсами. Например, приемы локального моделирования включают: оперативную наглядность, кодирование знаково-символических средств, определение мотивационных блоков, построение семантических и реляционных сетей, структурных блок-схем, логический анализ теорем и структурный анализ понятий.

Структура. **Требования:**

*) К/Л – коллоквиум, Л/З – лабораторные занятия, ППП – педагогические программные продукты,..., ДМ – дидактический модуль

Рис. 26

V. *Состав.*

– **Историко-методическое оснащение базовых учебных элементов** (БУЭ).

1 час ИМО на 10 часов аудиторных занятий.

Формы: рефераты, самостоятельные работы, учебно-исследовательские задачи, работа в малых группах, профессиональные пробы, историко-математические экскурсы и т.п.

Структура. **Требования:**

– элементы историзма и генезиса УЭ;

– отбор базовых и интегративных УЭ;

– взаимопереходы знаковых систем;

– решение задач при ограничении условий (поиск оптимальных условий);

– вариативность способов решения задач;

– структурный анализ УЭ;

– единичное и особенное проявлений теорий учения в моделировании процессов усвоения УЭ;

– актуализация фаз и типов ориентировки и исполнения в учебной деятельности;

– формирование культуры устной и письменной речи, мышления;

– фундирование опыта и личностных характеристик в направлении профессионализации;

– опора на устойчивые ассоциации, активизация ментальных и личностных характеристик.

Основные ЗУНМА являются объектом для целостного изучения наглядным моделированием (структурный анализ, сущность и явление, спирали фундирования, уровни усвоения, историко-методическое оснащение) в составе теоретического, практического, прикладного, мотивационного, деятельностного и эвристического компонента.

При этом в соответствии с критерием полноты и оптимальности базовые ЗУНМА школьной математики становятся основным исходным звеном содержания учебных элементов профессионального блока (I–III семестры). Базовые ЗУНМА вузовской математики проектируются с возможностью логического расширения базового блока до полного объема учебных предметов и покрытия базового блока школьной математики.

2.3.3. Содержание обучения

– знания, умения, навыки и методы деятельности, характерные для данной математической дисциплины (учебные элементы);

– учебная (рабочая) программа, учебный план;

– государственный образовательный стандарт школьного и вузовского математического образования.

В содержании математического образования вместе с традиционными учебными элементами: знаниями, умениями и навыками – актуализируются методы деятельности, характерные для данной математической дисциплины: фундирования, математической индукции, дихотомии, аксиоматический, аппроксимации и т.п., структурированные по уровням: профессиональный, фундаментальный и вариативный. Здесь мы используем определение метода по М. И. Махмутову [122] как системы регуляритивных принципов и правил организации учебного материала и педагогически целесообразного взаимодействия учителя и ученика, применяемой для решения определенного круга дидактических и воспитательных задач. Выявление и использование частных методов в математической дисциплине придает содержанию учебного материала определенную целостность и задает дополнительные внутренние связи.

На каждом этапе определяется соответствие учебных элементов Государственному образовательному стандарту, учебному плану и учебной программе (которые нормируют, в том числе, допустимые отклонения). На всех трех уровнях рассмотрения дидактических процессов наглядное моделирование играет основополагающую роль. Существенным является метод наглядного моделирования при построении логической структуры (миллеровское число, глубина уровней, гармоничное целое, законы гештальта и т.п.).

Глобальным компонентом дидактической системы является банк учебных предметов, образующий сквозную (в течение всех лет обучения) и содержательную целостность. Каждый учебный предмет определяет набор учебных дисциплин, включая теорию и методику обучения предмету, на весь период математического образования.

Учебный предмет, представляя собой целостную структуру учебной информации в составе теоретического, практического, прикладного, деятельностного, эвристического и гуманитарного компонентов, содержательно развертывается в базисном, процессуальном и иерархическом уровнях в своих локальных, модульных и глобальных проявлениях. При этом целостность и направленность дидактической системе придает развертывание спиралей фундирования базовых учебных элементов школьной математики (БУЭШМ) в рамках учебного предмета посредством построения родового теоретического обобщения и технологического (и методического) осмысления видовых его проявлений. Фрейм учебного предмета представлен на следующем рисунке.

Рис. 27. Фрейм учебного предмета

Предъявление спирали фундирования сопровождается развертыванием так называемого мотивационного блока, состоящего из системы прикладных и профессионально ориентированных задач, определяющих стимулирование познавательного интереса обучаемых.

Фреймовое представление целостной схемы фундирования учебных элементов позволяет определить компонентный и процессуальный состав теоретического обобщения базового школьного знания.

Основу для фундирования в виде базовых учебных элементов школьной математики (БУЭШМ) составляют 7 содержательных линий: числовая, функциональная, геометрическая, тождественных преобразований, уравнений и неравенств, стохастическая и алгоритмическая. Каждая содержательная линия определяет базовые знания, умения, навыки и методы вузовской математики, распределенные по оптимальному набору учебных предметов и дисциплин. Учебный предмет, представляя собой целостную структуру учебной информации в составе теоретического, практического, прикладного, деятельностного, эвристического и гуманитарного компонентов, разворачивается в базисном (содержательном), процессуальном и иерархическом уровнях в своих локальных, модульных и глобальных проявлениях. В развертывании содержания учебного предмета в контексте профессионализации фундирования БУЭШМ с особой отчетливостью прослеживаются три линии:

– логика определения содержания учебного предмета, исходя из его особенностей: отбор базовых учебных элементов, структуры, этапы изучения, интегративные знания, соотношение теоретического и практического компонентов и т.п.;

– логика преемственности и содержания теоретического обобщения БУЭШМ: содержательные линии школьной математики и набор учебных предметов вузовского обучения, построение системы логически взаимосвязанных видовых проявлений базовых родовых понятий, усиление прикладного и деятельностного компонентов обучения математике, модульный принцип развертывания содержания учебного предмета и т.п.;

– учет психологических и педагогических особенностей восприятия, усвоения, представления, применения, анализа и синтеза учебного материала субъектом обучения: наглядное моделирование, имитационное моделирование, структурный анализ базовых учебных элементов, усиление эвристического и гуманитарного компонентов, развитие интеллектуальных и личностных характеристик, вариативность решения учебных задач, взаимопереходы знаковых систем и т.п.

Аннотированная учебная программа (математический анализ, раздел “Введение в анализ”)

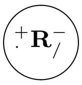
Общепрофессиональные умения.

Владеть логическим анализом теоремы; условие, заключение теоремы, необходимое и достаточное условие, обратная и противоположная теорема, силлогизмы, кванторы и пропозиционные связки, отрицание высказываний, конструктивная теорема, теорема существования, построение контрпримеров к условиям теоремы, построение блок-схемы доказательства. Владеть методами исследования и доказательства: “от противного”, метод Больцано, метод введения вспомогательной функции, метод математической индукции, метод продолжения, метод математического моделирования, метод последовательных приближений.

$$\overline{B} \Longrightarrow \overline{A} \qquad \xrightarrow{\quad +f \quad} \qquad n := n+1$$

Знания, умения, навыки, методы и алгоритмы

1. “Наивное” и аксиоматическое построение теории множеств, система обозначений. Конечные и бесконечные множества, примеры. Задание множеств. Включение и равенство множеств. Булеан множеств, число сочетаний C_n^m. Операции над множествами (объединение, пересечение, разность, симметрическая разность, декартово произведение). Доказательство одного из теоретико-множественных равенств. Диаграммы Эйлера-Венна.



$${}^{+}_{\cdot}\mathbf{R}^{-}_{/}$$

2. Аксиоматика действительных чисел (аксиомы сложения, умножения, порядка, связи, аксиома непрерывности Дедекинда). Теоремы существования разности и частного. Формулировки аксиом сложения (4), умножения (4), порядка (4). Доказать теорему существования разности $a - b$ или частного a/b действительных чисел. Доказать теорему:

$$(a \le b \wedge c \le d) \Longrightarrow (a + c \le b + d).$$

Метод математической индукции. Иметь навык в оперировании с действительными числами.

$$\overset{=}{\underset{\leq}{|x|}}$$

3. Определение модуля действительного числа. Свойства модуля (доказать одно свойство). Решение неравенств с модулем, понятие двойного неравенства, система, совокупность неравенств. Модуль суммы, разности, произведения. Доказательство (аналитическое и графическое) неравенства треугольника. Формулировка теоремы Архимеда. Доказательство следствия:

$$\varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbf{N} \ \forall n (n > N \Longrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon).$$

Уметь решать неравенства, содержащие модуль.

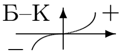
$$\mathbf{R}$$

4. Определения классов действительных чисел, целая и дробная часть действительного числа, диофантовы уравнения. Наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное двух натуральных чисел. Решение диофантова уравнения $ax + by = c$ с помощью алгоритма Евклида. Системы счисления. Позиционная запись натуральных чисел. Понятие бита и байта информации. Двоичная система счисления и ЭВМ.

$$10$$

5. Рациональные числа. Плотность рациональных чисел в **R**. Алгебраические и трансцендентные числа. Доказательство теоремы о плотности $a < \frac{m}{n} < b$. 10 примеров алгебраических и трансцендентных чисел. Числа e и π. Бином Ньютона и неравенство Бернулли.

6. Длина отрезка на прямой. Соизмеримые отрезки. Числовая прямая. Определение длины отрезка на прямой l. Построение отрезка, соизмеримого с данным. Установление взаимно однозначного соответствия между **R** и точками l. Числовая прямая. Несобственные точки $+\infty$ и $-\infty$, оперирование с бесконечностями.



$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^{n-1}$$

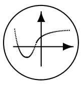
7. Классификация промежутков на числовой прямой. Система вложенных промежутков. Теорема Кантора (доказательство). Метод Больцано (дихотомии). Владеть понятием арифметической и геометрической прогрессии, уметь находить сумму бесконечного числа членов геометрической прогрессии.

(○) 10

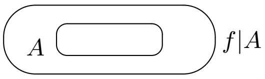
8. Понятие окрестности точки на числовой прямой (собственной и несобственной). Отделимость окрестностей (доказательство). Понятие предельной точки (10 примеров). Понятие внутренней точки (10 примеров). Понятие открытого и замкнутого множества (10 примеров).

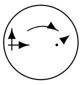
9. Понятие верхней и нижней границы (грани) множества (10 примеров). Замкнутость множества верхних и нижних границ множества (доказательство). Теорема существования граней (доказательство). Характеристическое свойство граней (формулировка). Уметь доказывать теорему существования корня.

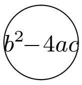
$A \xrightarrow{f} B$



10. Понятие функции. Система обозначений. Типы отображений (инъекция, сюръекция, биекция), примеры. Способы задания функций (аналитический, табличный, графический, словесный) (10 примеров). Понятие композиции функций. Ассоциативный закон композиции (доказательство). Контрпример для коммутативного закона. Понятие обратной функции (10 примеров). Иметь навык в построении графиков элементарными средствами.

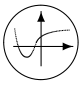


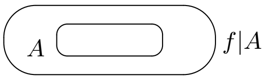




11. Понятие основной элементарной функции. Элементарные функции, типы (монотонные, периодические, ограниченные, четные, нечетные) (10 примеров). Классификация элементарных функций: многочлены, рациональные функции, иррациональные, неявные алгебраические, трансцендентные (10 примеров). Понятие декартовой, полярной и параметрической системы координат на плоскости (10 примеров). Иметь

навык перехода от одной системы координат к другой. Иметь навык исследования квадратичной функции. Метод продолжения.





12. Построение графиков основных элементарных функций: степенной, показательной, логарифмической, тригонометрических, обратных тригонометрических. Владеть методами преобразования графиков. Уметь построить график функции, представляющей собой сумму, произведение, композицию и обращение некоторых основных элементарных функций. Например, $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$, $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $y = \ln(2x-1)$. Построение графиков элементарных функций в декартовой, полярной системах координат, в параметрических координатах. Переход из одной системы координат в другую. Уметь приводить примеры непрерывного, периодического и другого продолжения функции.

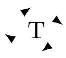
13. Последовательность. Способы задания, некоторые приемы конструирования последовательностей. Понятие последовательности. Способы задания: аналитический, арифметическая прогрессия, геометрическая прогрессия, рекуррентный способ задания, числа Фибоначчи. Некоторые приемы конструирования последовательностей: непрерывные дроби, арифметические операции, числовые ряды, десятичные дроби (10 примеров).

14. Предел последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Теоремы о бесконечно малых последовательностях. Понятие предела последовательности. Пример: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, $|q| < 1$. Сходящиеся и расходящиеся последовательности, примеры. Понятие бесконечно малой и бесконечно большой последовательности. Доказательство одной из теорем о бесконечно малых последовательностях. Понятие суммы числового ряда. Уметь вычислять пределы последовательностей: a^n, $(\sqrt[n]{a})$, $a > 0$, $(\sqrt[n]{n})$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Расходимость гармонического ряда.

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^{n-1}$$

15. Единственность предела последовательности. Переход к пределу в неравенствах, арифметические операции над пределами. Доказательство теоремы о единственности предела. Формулировки теорем о переходе к пределу в неравенствах (доказательство одной теоремы). Формулировки теорем о пределе суммы, произведения, частного (доказательство одной теоремы). Сумма бесконечного числа членов убывающей геометрической прогрессии. Владеть методами раскрытия неопределенностей вида

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 1^{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad \infty\pm\infty,\quad 0^{\infty}.$$



16. Понятие ограниченной последовательности (10 примеров). Доказательство теоремы об ограниченности сходящейся последовательности, понятие монотонной последовательности (10 примеров). Теорема Вейерштрасса (доказательство). Владеть логическим анализом теоремы: условие, заключение, обратная и противоположная теоремы, построение контрпримеров к условиям, построение блок-схемы доказательства.

17. Понятие подпоследовательности как сужение функции натурального аргумента. Примеры. Подпоследовательность как композиция функций. Доказательство теоремы о подпоследовательностях сходящейся последовательности. Лемма Больцано-Вейерштрасса (доказательство). Метод Больцано.

18. Понятие частичного предела последовательности. Доказательство теоремы о частичных пределах сходящейся последовательности. Понятие верхнего и нижнего предела последовательности. Примеры. Необходимое и достаточное условие существования предела (формулировка теоремы).

$$\mathrm{Lim}\, f$$

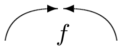
19. Предельная точка и сходящиеся последовательности. Понятие проколотой окрестности. Определение предела функции в точке на языке окрестностей. Запись различных вариантов (ε, δ)-определений $(a \in \mathbf{R}, L \in \mathbf{R} \wedge a \in \mathbf{R}, L = +\infty \wedge a = -\infty, L \in \mathbf{R})$

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

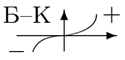
Пример на нахождение δ по ε (алгоритм).

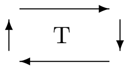
$$10 \qquad \mathrm{Lim}\, f \qquad \mathrm{Lim}\, f$$

20. Односторонние пределы. Предел функции на языке последовательностей. Понятие односторонних пределов функции в точке (10 примеров). Предел функции на языке окрестностей. Доказательство эквивалентности определения предела функции на языке окрестностей и последовательностей. Достаточное условие несуществования предела функции. Теоремы о пределе функции (о единственности предела, о промежуточной переменной) (доказательство). Замечательные пределы. Метод “от противного”. Сформулировать теоремы о пределе суммы, произведения и частного функций. Доказать теорему о пределе частного.



21. Определение непрерывности функции в точке и на множестве. Доказательство непрерывности двух элементарных функций. Доказательство теоремы о непрерывности сложной функции. Доказательство одной теоремы об арифметических операциях над непрерывными функциями. Теоремы о непрерывности суммы, произведения и частного.





22. Теоремы Больцано-Коши (доказательство). Метод Больцано. Логический анализ теоремы. Теоремы Вейерштрасса (доказательство). Равномерная непрерывность функции на множестве. Теорема Кантора.

2.3.4. Критерии

Внешний мониторинг определяется взаимодействием дидактической системы математического образования с педагогическими системами по отношению иерархической включенности и типологической характеристики. Это могут быть: педагогические системы высшего профессионального образования и т.п.; дидактические системы психолого-педагогического образования, естественно-научного образования, гуманитарного образования, школьного математического образования, методического образования и т.п.

Взаимодействие диагностируется по выделенным выше характеристикам уровней дидактических процессов количественным и качественным анализом меры взаимопроникновения. Критериями успешности функционирования дидактической системы математического образования являются

– высокий коэффициент корреляции между варьированием признака в исходной системе и в системах профессионального уровня (повышение квалификации, стажевые группы, профильные школы и т.д.);

– статистически достоверное влияние регулируемых факторов родственных дидактических систем на признак исходной системы, рассчитанное многофакторным дисперсионным анализом;

– статистически достоверный рост средних показателей варьирования признака (характеристики) от систем школьного уровня к исходной системе.

В период с 2002 по 2006 годы в Ярославском государственном педагогическом университете им. К. Д. Ушинского велась подготовка учителя на основе реализации экспериментального образовательного стандарта ВПО по специальности 032100 “Математика”, разработанного в свете концепции фундирования. При этом фиксировались значимые различия в результатах диагностики экспериментальной и контрольной групп студентов по завершении эксперимента в условиях статистически неразличимых уровнях показателей основных характеристик личностного развития студентов в начале эксперимента. Необходимость такого экспериментального исследования и его практической реализации обосновывается поиском более эффективных и научно-обоснованных позиций в проектировании образовательных систем, которые могут привести к качественным позитивным изменениям в структуре профессиональной подготовки будущего учителя математики средней школы, владеющего широким спектром фундаментальных знаний, компетентного в проектировании и осуществлении профессионально-педагогической деятельности в школе и способного к разработке авторских технологий проектирования учебной деятельности школьника.

В ходе эксперимента были получены следующие основополагающие результаты:

- студенты контрольной группы в большей степени ориентированы на заботу о собственном здоровье, установление близких отношений с людьми, интересную работу и творческую реализацию. Значимость данных ценностей для студентов, обучавшихся по стандартной программе подчеркивает ориентацию студентов на традиционные ценности, реалистичность их взглядов. Студенты экспериментальной группы, обучавшиеся по программе с применением технологии фундирования более уверены в себе, ориентированы на переживание прекрасного в природе и искусстве, стремятся к уважению окружающих, коллектива, к максимально полному использованию своих возможностей, сил и способностей; активнее используют возможность расширения своего образования, кругозора, общей культуры, интеллекта; для них значимо благосостояние, развитие и совершенствование других людей, всего народа, человечества в целом. Можно сделать вывод, что студенты, обучавшиеся по программе с применением технологии фундирования в большей степени ориентируются на гуманистические ценности, ориентированы на развитие собственной личности, система ценностей этих студентов идеалистична; несмотря на выделенные проблемные области в ценностной сфере студентов, общая гуманистическая направленность может сыграть положительную роль в реализации студентов в педагогической деятельности;
- студентов контрольной группы можно охарактеризовать как более способных действовать самостоятельно, решительно, правдивых, искренних. У них в большей степени развито чувство долга, умение держать свое слово. Студенты, обучавшиеся по программе с применением технологии фундирования, характеризуются большей критичностью к себе и окружающим людям, высокими требованиями к жизни и высокими притязаниями;
- профессиональная направленность студентов обеих групп характеризуется средним уровнем однородности и низким уровнем дифференцированности профессиональных предпочтений, что свидетельствует о незавершенности профессионального самоопределе-

ния и существовании проблемы выбора сферы профессиональной реализации и места будущей работы. Выявленные значимые различия свидетельствуют о том, что студенты, обучающиеся по программе с применением технологии фундирования в большей степени склонны к выбору профессии педагога в качестве сферы профессиональной деятельности;

- рассматривая отличия в профессиональной самооценке студентов обучавшимся по разным программам, следует отметить, что самооценка студентов обучавшихся по стандартной программе выше, чем у студентов обучавшихся по программе с применением технологии фундирования. На наш взгляд, полученные результаты объясняются тем, что студенты, обучавшиеся по стандартной программе, завышают свою самооценку, а студенты, обучавшиеся по программе с применением технологии фундирования, более критично относятся к себе, эта группа студентов видит меньше возможностей для реализации ценностей, поэтому в меньшей степени удовлетворена своей профессиональной позицией; студенты, обучавшиеся по программе с применением технологии фундирования более критичны к себе как к профессионалу, что создает возможность четче видеть собственные недостатки и работать по их устранению;
- студенты, обучавшиеся по программе с применением технологии фундирования, отличаются более высоким уровнем развития математических способностей, необходимых для успешной деятельности учителя математики, а также более высоким прогнозом успешности в профессиональной деятельности.

Глава 3

Методические основы математического образования будущего учителя математики

3.1. Технология наглядного моделирования в обучении математике

3.1.1. Дидактические процессы фундирования и наглядного моделирования

Получение гарантированных результатов обучения как по глубине понимания учебного материала, так и по количественным показателям непосредственно связано с повышением уровня технологичности обучения математике. Здесь связаны воедино три важных компонента: индивидуальные особенности восприятия, понимания, запоминания, прочности мнемических процессов обучаемого; технологические средства, параметры, характеристики организации управления познавательной деятельностью обучаемых; объем, интенсивность, внутренняя структура и организация знаково-символических средств. Концепция наглядного моделирования в обучении и ее компоненты опирались на основные характеристики этих трех важнейших направлений содержания математического образования будущих учителей математики, более того, именно наглядное моделирование в обучении математике может быть средством для достижения сущности новых знаний, формирования будущей профессиональной ориентировочной основы деятельности. В то же время о каких гарантированных результатах может идти речь, если это может быть и базовый уровень обученности по математическим дисциплинам, и уровень профессионально-педагогического мастерства будущего учителя математики? Что вообще означает в количественном отношении гарантированность результатов обучения математике? Начнем с ответа на второй вопрос.

Так как экспериментальная выборка студентов составляет, как правило, 50 человек при условии нормального распределения признака x и репрезентативности выборки, то о близости выборочной средней к генеральному параметру можно судить по отношению ошибки репрезентативности к сопровождаемой ею средней величине. Этот показатель C_s определяется по формуле

$$C_s = \frac{s_{\overline{x}}}{\overline{x}} \cdot 100\%.$$

Точность средних показателей, которыми оценивают результаты обучения, считается вполне удовлетворительной, если коэффициент C_s не превышает 3–5%.

Так как ошибка репрезентативности выборочной средней

$$S_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n(n-1)}}$$

может тогда быть найдена как

$$S_{\overline{x}} = \overline{x} \cdot \frac{C_s}{100\%},$$

то получим неравенство оптимальных “гарантированных результатов”

$$0,03\overline{x} \le S_{\overline{x}} \le 0,05\overline{x}.$$

Учитывая, что $n = 50$, получим далее $\Delta = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{50} \frac{(x_i - \overline{x})^2}{\overline{x}^2}}$

$$1,5 \le \Delta \le 2,5.$$

Более реальной выглядит ситуация, когда, например, на оценку “5” претендуют 16 человек, на “4” – 20 человек, на “3” – 10 и на “2” – 4. Тогда получим

$$\overline{x} = \frac{16 \cdot 5 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot 3 + 4 \cdot 2}{50} = 3,96,$$

$$\sqrt{4 \cdot 1,96^2 + 10 \cdot 0,96^2 + 20 \cdot 0,04^2 + 16 \cdot 1,04^2} \approx 6,3,$$

$$\Delta = \frac{6,3}{3,96} \approx 1,6,$$

что обеспечивает требуемую ошибку репрезентативности.

Таким образом, вероятностно гарантированные результаты обучения – это прежде всего варьирование признака на репрезентативной совокупности.

Однако при этом предполагается, что генеральная совокупность распределяется по нормальному закону. Поэтому необходимо дополнительно выяснить: случайны или не случайны отклонения эмпирической кривой от нормального распределения. Приближенно оценивать нормальность распределения позволяют центральные моменты третьего и четвертого порядков, используемые для измерения асимметрии и эксцесса.

Показатель асимметрии

$$A_s = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} p_i(x_i - \overline{x})^3}{ns_x^3}$$

представляет собой центральный момент третьего порядка, а показатель эксцесса

$$E_x = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} p_i(x_i - \overline{x})^4}{ns_x^4} - 3$$

соответственно – четвертого порядка. Как и другие оценки генеральных параметров, показатели асимметрии и эксцесса являются случайными величинами и сопровождаются ошибками репрезентативности, которые определяются по следующим приближенным формулам [101]

$$S_{A_s} = \sqrt{\frac{6}{n+3}}, \quad S_{E_x} = 2\sqrt{\frac{6}{n+5}}.$$

Нулевая гипотеза или предположение, что в генеральной совокупности показатели A_s и E_x равны нулю, опровергается, если

$$t_{A_s} = \frac{A_s}{{}^{s}A_s} > 3, \quad t_{E_x} = \frac{E_x}{{}^{s}E_x} > 3.$$

В нашем примере $A_s \simeq E_x < 3$ и в генеральной совокупности $A_s = E_x = 0$.

Таким образом, оценочные значения вероятностно гарантированных результатов обучения должны удовлетворять требованиям нормального распределения генеральной совокупности $(A_s = E_x = 0)$.

Вопросы разработки планируемых (гарантируемых) результатов обучения особенно активно ставятся в последние годы в связи с разработкой и внедрением Государственного образовательного стандарта школьного образования и Государственного образовательного стандарта высшего образования. Так, в Государственном образовательном стандарте школьного образования записано:

“ Требования к математической подготовке школьников задаются на *двух уровнях.* Первый фиксирует те *возможности* в усвоении курса математики, которые обязана предоставить учащимся школа. Он характеризует результаты, к которым могут стремиться и при желании достичь учащиеся, изучающие общеобразовательный курс. Его достижение должно быть обеспечено содержанием учебников и соответствующим качеством преподавания. Таким образом, давая представление о желаемой подготовке хорошо успевающего ученика, он одновременно задает обязательные требования к уровню предъявления содержания. Второй уровень – это уровень *обязательной подготовки.* Он характеризует тот безусловный минимум, которого должны достигать все учащиеся, и определяет нижнюю допустимую границу результатов математического образования”, а в ГОС высшего образования определены перечень учебных дисциплин и учебные программы, подлежащие обязательному исполнению. Но если в ГОСе высшего образования пути и методы реализации учебных программ не конкретизированы и измерители обученности (готовности к будущей профессиональной деятельности) не определены, то в ГОСе школьного образования измерители задаются, и требуется их обязательное прохождение.

В. Г. Болтянский и Г. Д. Глейзер [31] справедливо критикуют разработки “планируемых обязательных результатов обучения” за вероятное снижение уровня логической подготовки учащихся, за рецептурность формируемых умений и навыков. Авторы предлагают находить выход в дифференциации обучения по отношению к курсу математики в средней школе фуркацией на три группы по уровням: общекультурный, прикладной и творческий.

Нам представляется, что применительно к математическому образованию будущего учителя математики получение вероятностно гарантированных результатов обучения возможно в сочетании с развитием опыта личности, учебных и познавательных интересов студентов-математиков. Вопрос заключается в принципах, объеме, содержании, измерителях вероятностно гарантированных результатов обучения, их влиянии на уровень профессиональной готовности к деятельности учителя математики. Конечно, гарантированность результатов обучения предполагает повышение уровня технологичности обучения.

С 60-х годов нашего века в дидактических исследованиях стал появляться термин “технология обучения”. Эта педагогическая категория возникла в связи с исследованием вопросов проектирования учебной деятельности, и различные подходы к определению технологии обучения и ее содержанию давались в трудах В. П. Беспалько [23], В. М. Монахова [133], В. В. Серикова [177], М. А. Чошанова [246], М. В. Кларина [89] и других.

Укажем некоторые из них:

– технология – это искусство, мастерство, умение, совокупность методов обработки, изменения состояния;

– технология – это интеллектуальная переработка технически значимых качеств и способностей;

– технология – это совокупность знаний о методах осуществления каких-либо процессов;

– технология – это организованное, целенаправленное преднамеренное педагогическое влияние и воздействие на учебный процесс;

– технология – это содержательная техника реализации учебного процесса;

– технология – это средства гарантированного достижения результатов обучения;

– технология – это описание процесса достижения планируемых результатов обучения.

Объектом педагогической технологии является структура и логика конструирования педагогического процесса, способы его организации по реализации педагогических задач в соответствии с теми или иными принципами или условиями [33].

– технология – это проект определенной педагогической системы, реализуемой на практике.

При этом следует отмежеваться от приравнивания педагогической технологии к средствам обучения (С. Андерсен, Р. Де Киффер, Ф. Уинворт и др.).

Проанализировав большое число монографий и статей по педагогической технологии, П. Митчелл [274] сформулировал следующие определения: педагогическая технология есть область исследования и практики (в рамках системы образования), имеющая связи (отношения) со всеми аспектами организации педагогических систем и процедурой распределения ресурсов для достижения специфических и потенциально воспроизводимых педагогических результатов.

М. А. Чошанов [246], проводя анализ различных подходов к проблеме педагогических технологий, выделяет наиболее существенные признаки, присущие именно педагогической технологии: диагностическое целеполагание, результативность, экономичность, алгоритмируемость, проектируемость, целостность, управляемость, корректируемость, визуализация.

Диагностическая постановка целей и результативность предполагают гарантированное достижение целей и эффективность процесса обучения.

Экономичность выражает качество педагогической технологии, обеспечивающее резерв учебного времени, оптимизацию труда преподавателя и достижение запланированных результатов обучения в сжатые промежутки времени.

Алгоритмируемость, проектируемость, целостность и управляемость отражают различные стороны идеи воспроизводимости педагогических технологий.

Признак визуализации затрагивает вопросы наглядного моделирования в процессе обучения математике, в том числе применение аудиовизуальной и компьютерной техники.

Нашему подходу ближе определение, данное В. М. Монаховым [133]: “Педагогическая технология – это продуманная во всех деталях модель совместной педагогической деятельности по проектированию, организации и усвоению учебного процесса с безусловным обеспечением комфортных условий для учащихся и учителя. При этом обязательно задаются технологические нормы допустимых отклонений от идеальной модели, в границах которой достижение планируемых результатов гарантировано”.

В. М. Монахов дает понятие дидактического модуля как основной структурной единицы педагогической технологии: “Дидактический модуль – это методический аппарат учительской деятельности..., который определяет логико-теоретические подходы, приемы, стиль, законы интеллектуальной деятельности учителя как на этапе проектирования учебного процесса, так и на этапе его реализации и оценки”. Автор отмечает, что дидактический модуль выступает основным носителем новой технологии обучения.

В основе инновационного подхода к отбору содержания предметной подготовки учителя математики лежит овладение когнитивным стилем профессиональной деятельности посредством актуализации субъективного опыта в процессе освоения теоретического обобщения БУЭШМ на основе процессов фундирования и наглядного моделирования.

Педагогическая технология представляет собой существо совместной деятельности преподавателя и студента, ведущей к достижению планируемых результатов. В то же время методическое оформление сути технологического процесса придает технологии гибкость и определяется, в частности, как содержанием учебной информации, так и педагогическим мастерством преподавателя.

Выделяя в педагогическом процессе обучения математике три процессуальных компонента: учебную деятельность, обучающую деятельность и взаимодействие, особое внимание будем уделять проектированию и организации деятельности студента. Существенным при этом является то, что обучающая деятельность опосредована учебной деятельностью, активностью и личностными качествами студента и направлена на всестороннее развитие личности в соответствии с идеей личностно-ориентированного подхода. Учебная деятельность при этом предполагает развертывание процессов (в соответствии с динамической структурой личности) в трех обозначенных выше направлениях:

Таблица 9

Направления	**Состав деятельности**	**Содержание** (структуры математики)	**Формы**
• объектно-сущностное (приобретение опыта)	Формирование когнитивного опыта личности путем раскрытия внутренних существенных связей объекта изучения, выделение базисных учебных элементов и определение их иерархий, свертывание и развертывание ООУД	• топологические, • алгебраические, • порядковые, • вероятностные, • геометрические (кривые, поверхности, графы), • функциональные (мера, производная, интеграл, ряд)	Опорные таблицы ЗУНМА, аннотированные учебные программы, интегрированные экзаменационные программы, дидактические модули, спирали фундирования, содержательные блоки, учебные предметы и дисциплины, банки задач, историко-методическое оснащение учебного предмета, структурный анализ базовых учебных элементов (школьной и вузовской математики), актуализация технологий профессионально-математической деятельности, цепочки задач научно-исследовательского характера, мотивационные блоки

• деятельностно-результативное (применение и преобразование опыта)	Процесс применения и преобразования ментального опыта личности в виде комплекса внешних и внутренних действий, увязывающих новую информацию (знания) с наличным репертуаром памяти и усвоенными стереотипами деятельности, направленный на получение конкретных результатов на основе ИОУД	• логические (кванторы, предикаты, доказательства, формулы), • знаково-символические (алфавит, индексы и символы, языковые знаки), • реляционные (таблицы, графики), • продукционные (алгоритмы, процедуры, математические методы), • семантические (блок-схемы, теоремы, определения)	Алгоритмико-вычислительные процессы, деловые и имитационные игры, выполнение курсовых, дипломных, лабораторных работ, построение геометрических объектов, доказательство теорем, решение уравнений и неравенств, наглядное моделирование, тождественные преобразования, взаимопереходы знаковых систем
• личностно-адаптационное (развитие личностных характеристик и интеллекта)	Диагностируемое целеполагание, прогнозирование и принятие решения, способность к обнаружению и постановке проблемы, анализ данных и мобилизация информации, рефлексия и оценочная деятельность, анализ и синтез, обобщение и конкретизация, аналогии и ассоциации	• преемственность школьных и вузовских знаний, умений, математических методов, идей и процедур, • содержательное обобщение базовых школьных учебных элементов, • внутренняя интерпретируемость, структурированность, связность, активность и целостность профессиональных проб и опыта, • освоение структуры и состава ООУД, • развитие когнитивных и креативных структур, профессионально	Педагогическая и стажерская практики

		важных и значимых качеств, педагогического и математического мышления	

Наиболее адекватной формой и средством развертывания дидактических процессов фундирования и наглядного моделирования является структура дидактического модуля.

Дидактический модуль, являясь целостной структурой совместной деятельности учителя и ученика в процессе решения педагогических задач, может быть исследован также как компонент педагогической системы деятельности и, более того, психологической системы деятельности ученика. С точки зрения деятельностной теории учения [221], дидактический модуль должен также содержать ориентировочную, исполнительскую и контрольно-коррекционную части. Это определяет три основных компонента дидактического модуля (ДМ):

- ориентировочную основу деятельности (как учителя, так и ученика);
- информационную основу деятельности (как учителя, так и ученика);
- блок управления учителем когнитивной деятельностью ученика.

Первый блок содержит:

- введение (описание структуры и состава деятельности, особенности учебного предмета);
- базу данных и базу знаний, необходимых для усвоения нового материала (преемственность деятельности);
- аннотированную учебную программу, детализированную по уровням усвоения знаний, ступеням абстракции, мотивации и продуктивности учебной деятельности (развернутость содержания);
- локальные фрагменты (и их динамика) пластов спиралей фундирования, необходимо содержащие школьный (профессионально-направленный) и мотивационный компонент (обобщенность деятельности);
- интегративную экзаменационную программу (интегративные ЗУНМА, творческие задания, общеучебные умения, профессионально-математический базис) как свернутость деятельности и условие для преемственности ДМ.

Требования к проектированию дидактического модуля включают в себя: преемственность содержательных линий школьной и вузовской математики; использование современных форм представления знаний (логической, реляционной, семантической, продукционной, фреймовой); развертывание и свертывание спиралей фундирования базовых учебных элементов школьной математики; блоки мотивационно-прикладных задач, оснащающих спирали фундирования, и др. Компонентный состав дидактического модуля представлен на следующем рисунке:

Рис. 28. Компоненты ДМ учебного предмета: *ЛК* – лекционный курс; *ПК* – практический курс; *ЛЗ* – лабораторные занятия; *СР* – самостоятельная работа; *К/Р* – контрольная работа; *ДК/Р* – домашняя контрольная работа; *ППП* – педагогический программный продукт; *НИР* – научно-исследовательская работа; *КЛ* – коллоквиум; Σ – итого

При этом **деятельностный модуль** определяет проектирование учебной деятельности студентов, целью и результатами которой является получение конкретных проявлений и конкретизаций математических понятий, утверждений, процедур и алгоритмов, выраженных упорядоченными наборами чисел и простейших геометрических объектов.

Определение и наглядное моделирование ориентировочной основы учебной деятельности (ООД) в процессе обучения математике и предъявление ее обучаемому создает положительную мотивацию учения диагностируемого уровня.

ООУД представляет собой свернутую структурированную модель (дидактический модуль) содержания учебной деятельности, адекватно отражающую динамику и логику развертывания учебного содержания (учебных элементов) реального педагогического процесса, включающую таксономию учебных целей и спирали фундирования.

Процессуальная структура дидактического процесса обучения математике представлена на следующем рисунке:

Рис. 29. Обогащенная дидактическая система

В. П. Беспалько [23], вводя понятие учебных элементов (УЭ) (объекты, явления и методы деятельности), рассматривает технологические компоненты глобальной структуры в рамках логической структуры содержания обучения. В основе этой методики лежит выбор минимального числа УЭ в каждом из предлагаемых к изучению учебных предметов, обеспечивающий успешное решение задач.

Для целей обучения математике в педвузе нам представляется оптимальной следующая технология.

Имея в виду подход В. М. Монахова, определим основные компоненты и уровни технологии наглядного моделирования в обучении математике [133]:

I уровень – **концептуальный**, представляющий стратегические задачи, решаемые технологией; описываются сущность технологии, основные элементы и компоненты, их функции;

II уровень – **процедурный**, раскрывающий сущность каждого компонента как в отдельности, так и в совокупности в процедуре создания, внедрения и развития новой педагогической технологии;

III уровень – **предметно-конкретный**, представляющий сущность, этапность, содержание конкретной разработки новой педагогической технологии по тому или иному учебному предмету;

IV уровень – **материализация технологии**; здесь дается описание основных возможных результатов и выходов, завершающих создание новой педагогической технологии и обеспечивающих ее полноценное внедрение и функционирование.

Поэтому рассмотрим компоненты концепции наглядно-модельного обучения и их следующую возможную технологизацию.

При решении технологических задач реализации дидактической системы математического образования будущего учителя математики и, как следствие, получения вероятностно гарантированных результатов обучения для большинства студентов одним из ведущих факторов, определяющих оптимальность дидактической системы, выступает исходное состояние личности обучаемого. Многолетние наблюдения за качественным составом нового набора в педвузы, равно как и исторические экскурсы, не позволяют усомниться в том, что более половины студентов I курса родились и выросли в сельской местности (данные по Ярославскому педуниверситету за последние 10 лет колеблются от 56% до 59% абитуриентов из сельской местности) и лишь немногие из них имеют “выдающиеся” математические способности (число выпускников физико-математического факультета ЯГПУ, окончивших вуз с отличными оценками, за последние 10 лет колеблется от 6% до 10% от набора).

Поэтому важным аспектом диагностируемого целеполагания измерителей качества усвоения дидактических модулей (теоретического, прикладного, методического) является диверсификация уровней усвоения учебного материала, причем мы будем различать усвоение понятий, теорем, алгоритмов и т.п. и освоение практических умений, связанных с данным понятием, теоремой, алгоритмом. Это отличается от подхода Н. А. Копытова [96], который, освещая вопрос о том, что подразумевается под “сформированным понятием”, отмечает, что оно представляет собой наличие “в... сознании некоторой совокупности родственных понятий и соответствующих им умений”. Н. А. Копытов, не употребляя термин “конструирование технологии обучения”, практически задает этапы проектирования методической системы, направленной на формирование понятий: выявление совокупности понятий и умений, четко описывающих базовый уровень качества рассматриваемого понятия; полученная на первом этапе совокупность формирует минимальную систему познавательных задач на заданном уровне; минимальный класс заменяется более точно описывающим; далее формируются совокупности задач, позволяющие проверить умение решать.

В то же время А. В. Усова [230] выделяет следующие критерии усвоения понятий:

– полнота усвоения содержания понятия;

– степень усвоения объема понятия, являющаяся мерой его обобщенности;

– полнота усвоения связей и отношений данного понятия с другими;

– умение отделить существенные признаки понятия от несущественных;

– умение оперировать понятиями при решении задач;

– умение классифицировать понятия, правильно их соотносить друг с другом.

С. Б. Суворова [220] рассматривает систему методических требований, которым должна удовлетворять система упражнений, направленная на формирование понятия, и отмечает, что формирование понятий через систему задач требует создания дидактических условий, позволяющих учащимся осознать, прочно запомнить, самостоятельно конструировать и формировать определения понятий.

В зависимости от того, в какой мере усвоение понятия удовлетворяет критериям, определяются уровни его усвоения, психологи Д. Н. Богоявленский, Н. А. Менчинская, М. Н. Шардаков различают четыре уровня. Первый характеризуется диффузно-рассеянным представлением о предмете, явлении. Для второго уровня характерным является то, что ученик уже может указать признаки понятий, но не может отделить существенные от несущественных. Для третьего уровня усвоения понятий характерным является то, что ученик усваивает все существенные признаки, но понятие оказывается еще скованным единичными образами, служившими опорами при формировании понятия. Понятие еще не обобщено. Четвертый уровень характеризуется тем, что понятие уже обобщено, усвоены существенные связи данного понятия с другими, благодаря чему ученик свободно оперирует понятием в решении различного рода задач. Возникает также необходимость в выделении еще более высокого пятого уровня усвоения понятия (А. В. Усова), характеризующегося установлением связи понятий, формируемых в разных учебных предметах.

Однако мы в диагностировании целеполагания и экспериментальной работе будем придерживаться уровней усвоения знаний по В. П. Беспалько [23].

То, что мы привычно называем “знания, умения, навыки и математические методы” (последнее встречается реже и включается автором в перечень), В. П. Беспалько называет **учебными элементами** (УЭ) или объектами, явлениями (процессами) и методами деятельности. В. П. Беспалько определяет четыре последовательных уровня усвоения, отображающие развитие опыта учащихся в процессе обучения:

I уровень – это алгоритмическая деятельность при внешне заданном алгоритмическом описании (“с подсказкой”);

II уровень – репродуктивное алгоритмическое действие (типовая задача): учащиеся выполняют его, самостоятельно воспроизводя и применяя информацию о ранее усвоенной ориентировочной основе выполнения данного действия;

III уровнь – продуктивное действие эвристического типа (нетиповая задача): эвристическая деятельность, выполненная не по готовому алгоритму или правилу, а по созданному или преобразованному в ходе самого действия;

IV уровень – продуктивное действие творческого типа, когда создается объективно новая ориентировочная основа деятельности.

Основной задачей педагогической технологии является диагностируемое определение целей обучения и разработка материалов для объективного контроля за качеством знаний обучаемых на всех этапах обучения.

3.1.2. Уровень глобальной структуры целеполагания

Рассматривается в трех дидактических модулях: теоретическом, практическом, методическом (в отличие от концепции В. М. Монахова модули в нашей интерпретации имеют **сквозной характер** и конкретизируются на протяжении всего курса обучения).

При определении диагностируемого целеполагания будем использовать таксономию учебных целей по Б. Блуму в когнитивной, аффективной и психомоторной областях. Когнитивные цели могут быть достигнуты в ходе учебного процесса, длительностью в семестр, учебный год или несколько лет. Однако таксономия аффективных целей применяется в достаточно гибкой форме. Психомоторные цели объективизируются в возможности диагностирования взаимопереходов знаково-символических систем деятельности и овладения общеучебными умениями и навыками. Приведем систематизацию когнитивных целей по Б. Блуму [89].

Категории учебных целей в когнитивной области

1. Основные категории учебных целей: знание. Эта категория обозначает знание и воспроизведение изученного материала. Речь может идти о различных видах содержания – от конкретных фактов до целостных теорий. Общая черта этой категории – припоминание соответствующих сведений.

Примеры обобщенных типов учебных целей: ученик знает употребляемые термины, знает конкретные факты, знает методы и процедуры, знает основные понятия, знает правила и принципы.

2. Основные категории учебных целей: понимание. Показателем способности понимать значение изученного может служить преобразование (трансляция) материала из одной формы выражения в другую, "перевод" его с одного "языка" на другой (например, из словесной формы – в математическую). В качестве показателя понимания может также выступать интерпретация материала учеником (объяснение, краткое изложение) или же предположение о дальнейшем ходе явлений, событий (предсказание последствий, результатов). Такие учебные результаты превосходят простое запоминание материала.

Примеры обобщенных типов учебных целей: ученик принимает факты, правила и принципы, интерпретирует словесный материал, интерпретирует схемы, графики, диаграммы, преобразует словесный материал в математические выражения, предположительно описывает будущие последствия, вытекающие из имеющихся данных.

3. Основные категории учебных целей: применение. Эта категория обозначает умение использовать изученный материал в конкретных условиях и новых ситуациях. Сюда входит применение правил, методов, понятий, законов, принципов, теорий. Соответствующие результаты обучения требуют более высокого уровня владения материалом, чем понимание.

Примеры обобщенных типов учебных целей: ученик использует понятия и принципы в новых ситуациях, применяет законы, теории в конкретных практических ситуациях, демонстрирует правильное применение метода или процедуры.

4. Основные категории учебных целей: анализ. Эта категория обозначает умение разбить материал на составляющие так, чтобы ясно выступала его структура. Сюда относится вычленение частей целого, выявление взаимосвязей между ними, осознание принципов организации целого. Учебные результаты характеризуются при этом более высоким интеллектуальным уровнем, чем понимание и применение, поскольку требуют осознания как содержания учебного материала, так и его внутреннего строения.

Примеры обобщенных типов учебных целей: ученик выделяет скрытые (неявные) предположения, видит ошибки и упущения в логике рассуждения, проводит различия между фактами и следствиями, оценивает значимость данных.

5. Основные категории учебных целей: синтез. Эта категория обозначает умение комбинировать элементы, чтобы получить целое, обладающее новизной. Таким новым продуктом может быть сообщение (выступление, доклад), план действий или совокупность обобщенных связей (схемы для упорядочения имеющихся сведений). Соответствующие учебные результаты предполагают деятельность творческого характера с акцентом на создание новых схем и структур.

Примеры обобщенных типов учебных целей: ученик пишет небольшое творческое сочинение, предлагает план проведения эксперимента, использует знания из разных областей, чтобы составить план решения той или иной проблемы.

6. Основные категории учебных целей: оценка. Эта категория обозначает умение оценивать значение того или иного материала для конкретной цели. Суждения ученика должны основываться на четких критериях. Критерии могут быть как внутренними (структурными, логическими), так и внешними (соответствие намеченной цели). Критерии могут определяться самим учащимся или же задаваться ему извне (например, учителем). Данная категория предполагает достижение учебных результатов по всем предшествующим категориям плюс оценочные суждения, основанные на ясно очерченных критериях.

Примеры обобщенных типов учебных целей: ученик оценивает логику построения материала в виде письменного текста, оценивает соответствие выводов имеющимся данным, оценивает значимость того или иного продукта деятельности, исходя из внутренних критериев, оценивает значимость того или иного продукта деятельности, исходя из внешних критериев качества.

Целеполагание теоретического модуля включает:

– овладение знаниями на уровне теоретических обобщений;

– выделение базовых знаний: понятий, теорем, алгоритмов, методов;

– определение внутренней структуры теоретического обобщения (фундирования) базовых знаний;

– обеспечение преемственности базовых школьных знаний по математике и вузовских;

– определение профилизации теоретических интересов через систему специальных курсов;

– формирование качеств математического мышления и творческой активности личности студента.

Целеполагание прикладного модуля включает:

– овладение общеучебными умениями и навыками, включая взаимопереходы знаково-символических систем деятельности;

– выделение базовых умений и навыков математической деятельности;

– соблюдение покрытия базовых школьных умений и навыков вузовскими в процессе обучения математике;

– создание мотивационного блока прикладных задач, учебных задач как элемента проектирования будущей профессиональной деятельности и как взаимоперехода от теоретических знаний к практическим;

– контролирующую функцию практического материала как критерий формирования и усвоения математических знаний;

– формирование качеств математического мышления и творческой активности личности студента.

Целеполагание методического модуля включает:

– обеспечение школьного компонента математических знаний, умений, навыков и методов;

– обеспечение частичных методик учебных предметов математического цикла;

– обеспечение взаимоперехода базовых умений в базовые навыки будущей профессиональной деятельности;

– обеспечение методического компонента теорий, концепций, методов и приемов обучения математике;

– формирование профессионально важных и профессионально значимых качеств будущего учителя математики: коммуникативные способности, педагогическое мастерство, адаптивные возможности, самооценка, самообразование и т.п.;

– формирование методического мышления и творческого отношения к профессии учителя.

Основанием для целостного подхода к типологии целеполагания служит структура личности студента и требования к минимуму содержания и уровню подготовки выпускника по специальности “математика”.

Исследование проведем в соответствии с компонентами наглядного моделирования в обучении математике:

– **Модель целостного математического объекта.** Прежде всего отметим, что структурными единицами здесь могут выступать дидактические модули: темы, разделы, дисциплины, учебные предметы, учебные планы, реализуемые в форме схематизированной учебной программы. Структурными элементами дидактического модуля выступают: базовые знания, умения, навыки и математические методы, внутренние спирали фундирования (сквозные и междисциплинарные), укрупнение дидактических единиц, базы данных (блоки задач, цепочки исследовательских задач, мотивационные блоки и т.п.), педагогические программные продукты (ППП) и т.д., которые создают ориентированную основу действий в процессе управления познавательной деятельностью студентов. Детализация этого пункта будет дана в §3 главы III для раздела “Дифференциальное и интегральное исчисление”.

– **Знаково-символические средства (ЗСС) и деятельность.** Напомним [174], что материальные ЗСС – это реальные предметы, материализованные ЗСС – формулы, графики, знаки, символы и т.п., перцептивные ЗСС – перцептивные образы, идеальные ЗСС – идеальные объекты: понятия, теории, алгоритмы.

Модели (схемы, коды, заместители) ЗСС проектируются a priori с учетом закономерностей психологического восприятия (законы гештальта, правило 7 перцептивных объектов, правило правого верхнего угла, правило квадрата и т.п.) и нейрофизиологических механизмов запоминания, воспроизведения, хранения информации. Так как модель (схема) ЗСС должна представлять собой ориентировочную основу действий (ООД), то должна быть отражена характеристика структурных компонентов ООД [174]:

– наличие схемы будущего продукта действия с его отличительными заданными показателями;

– образец конечной формы действия с ее заданными показателями;

– орудия действия, среди которых есть основные (те, которые служат средством преобразования), вспомогательные и контрольные;

– общая схема действия, так называемый его алгоритм, с выделением основных разделов.

Ценность данной модели фундирования для учебного процесса в вузе и будущей профессиональной деятельности для студента-математика несомненна и должна найти место в учебных программах математического анализа.

Согласно В. П. Беспалько [23], педагогическая технология характеризуется в отношении целеполагания **принципом диагностической целенаправленности**; он означает необходимость такой постановки целей обучения, которая допускала бы объективный и однозначный контроль степени достижения цели, т.е. настолько точно и определенно, чтобы можно было однозначно сделать заключение о степени ее реализации и построить вполне определенный дидактический процесс, гарантирующий ее достижение за заданное время.

В определенной мере таким технологическим средством модели глобальной структуры для математического содержания может служить **методика микродипломов** для итогового государственного экзамена выпускников [188], реализуемая в рамках концепции наглядного моделирования в обучении.

Государственный экзамен по математическому анализу предназначен для определения итогового уровня математических знаний, умений, навыков, развития математического мышления и культуры математических действий выпускников со специфическими знаково-символическими формами количественных соотношений действительного мира, отражающих основные понятия математического анализа: число, окрестность, функция, предел, непрерывность, производная, интеграл, ряд, функционально-дифференциальные уравнения, полнота метрических пространств, аппроксимация, мощность, мера. Уровень математических знаний, умений и навыков будущего учителя математики должен сочетаться с глубоким знанием школьного курса математики, методов преподавания, отражать существенные взаимосвязи школьного и вузовского курсов математики. Студент должен показать сознательность усвоения учебного материала, владение приемами познавательной деятельности и такими важнейшими мыслительными операциями, как анализ и синтез, абстрагирование и конкретизация, сравнение и обобщение, аналогия и ассоциация, индукция и дедукция. А. Я. Хинчин выделял 4 характерных признака математического мышления: доведение до предела доминирования логической схемы рассуждений, лаконизм, сознательное стремление всегда находить кратчайший логический путь, ведущий к цели, четкая расчлененность хода аргументации, скрупулезная точность символики. Достаточно высокий уровень математической культуры предполагает владение четким математическим языком, поскольку только в том случае, если учитель математики владеет языковой культурой, он сможет приучить школьников к краткой, логически точной речи, свободной от слов, не несущих словесной нагрузки. В настоящее время, когда поставлена задача вооружить школьников знаниями и навыками использования современной вычислительной техники, обеспечить широкое применение компьютеров в учебном процессе, естественно считать необходимыми составными частями математической культуры учителя логическую, алгоритмическую и вычислительную культуру, включающую в себя, в частности, умение организовывать и использовать средства вычислительной техники.

Культурное мышление – это такое мышление, при котором используются разные способы и приемы мышления в определенной строгой системе, в полном соответствии с характером решаемой математической задачи. Дисциплина мышления предполагает, во-первых, анализ объекта мысли, во-вторых, исследование на основе этого анализа своей математической деятельности и, в-третьих, пошаговый самоконтроль и самопроверку выполненной деятельности.

Наконец, уровень и культура математического мышления предполагают наличие некоторого необходимого уровня мыслительных способностей вообще, за пределами которого развитие и становление математического мышления невозможно. На каждом потоке имеется 10–15% студентов, мыслительные возможности которых постоянно входят в противоречие с уровнем преподавания дисциплин, а именно, с математическим содержанием. Вся наша работа сводится к интенсификации мыслительной деятельности таких студентов: дополнительные занятия, консультации и т.д., в то время как необходимо просто развивать целенаправленно ту или иную характеристику мышления.

В период бурного развития молодого организма (17–22 года) возникает необходимость управления развитием математических способностей студентов. Создание систем непрерывного тестирования позволит повысить индивидуализацию процесса обучения и возможность сконцентрированного усилия в формировании необходимых математических форм мышления.

Проведение государственного экзамена по методике микродипломов предполагает изложение в течение 15–20 минут основных положений (включая обоснования) теории и необходимой конкретизации (примеры, иллюстрации, конспект-схемы и т.п.), составляющей содержание аннотации вопроса экзаменационной программы; вопрос выдается студенту-выпускнику за 10 дней до экзамена.

Экзаменационные вопросы носят сквозной характер и детализированы по знаниям, умениям, навыкам и математическим методам, что соответствует **принципу завершенности обучения** В. П. Беспалько.

Отбор материала, способы его представления в момент изложения являются компетенцией отвечающего экзаменационный вопрос, однако экзаменующийся должен быть готов дать необходимые разъяснения содержания теоретических положений и практических умений, отраженных в аннотации к экзаменационному вопросу. В процессе ответа экзаменующемуся членами ГАК могут быть заданы любые дополнительные вопросы из контрольного минимума.

В процессе ответа студент-выпускник физико-математического факультета должен показать высокие профессиональные качества будущего учителя математики, уровень своей математической культуры и культуры речи, умение четко, грамотно и связно изложить большой объем информации за ограниченное время.

Приведем примеры экзаменационных вопросов из интегративной программы дидактического модуля:

1. Мощность множества. Шкала мощностей (упорядочение, неограниченность сверху, линейность). Счетные множества. Несчетность континуума.

Построение шкалы мощностей с помощью факторизации по отношению эквивалентности. Теорема Кантора-Бернштейна (доказать). Несчетность интервала и всей прямой (доказать). Сформулировать теорему Кантора о высших мощностях и проиллюстрировать для множества из n элементов. Счетность множества рациональных чисел (доказать). Указать мощность множеств $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{I}$, $\mathbf{T}$. 10 примеров множеств мощности континуума.

2. Предел функции в точке a. Пространство Lim_a. Односторонние и бесконечные пределы. Признаки существования предела. Замечательные пределы.

Предел функции в точке (окрестное определение), (ε, δ)-язык, язык последовательностей (по Гейне). Эквивалентность (ε, δ)-языка и языка Гейне (доказать). Предел последовательности (определение). Алгебраическая структура $(\pm, \cdot, /)$ и структура отношения порядка $\leq$ на множестве Lim_a. Замечательные пределы (перечислить), число e. Доказать один из признаков существования предела.

3. Интегрирование как обратная операция к дифференцированию. Формула Ньютона-Лейбница. Техника неопределенного интегрирования.

Задача восстановления F из выражения $dF(x) = F'(x)dx$, обращение дифференциального оператора $\frac{d}{dx} : \mathbf{C}^1 \longrightarrow \mathbf{C}$, линейность и структура ядра N оператора $\frac{d}{dx}$ (доказать). Существование $\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^1/N$, линейность и обратимость $\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1}$ (доказательство), обозначение $\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} = \int \underline{\qquad} dx$ (10 примеров первообразных функций), геометрический и физический смысл первообразной, основная теорема интегрального исчисления. Техника неопределенного интегрирования (по частям, подстановка, интегрирование рациональных функций) – примеры на каждый случай.

– **Устойчивость перцептивного образа и представления.** Проблема устойчивости перцептивного образа, а затем и формируемых остаточных фреймов в долговременной памяти обучаемого является центральной в концепции наглядного моделирования в обучении математике. Устойчивость перцептивного образа глобальных математических объектов будет определяться наглядной схематизацией их структурных компонентов. Схематизация в этом случае есть использование схем для ориентировки в реальности, например, в определении последовательности прохождения разделов и тем курса математического анализа. Для этого необходимо иметь структурно-логическую схему изучения учебного предмета по разделам и темам, с целью выявления зависимости между отдельными компонентами или диагностики функционирования системы математических знаний. Как отмечает Н. Г. Салмина, “в качестве обозначаемого могут выступать любые связи: структурные, функциональные, генетические. В качестве средств обозначения используются **устойчивые системы** с пространственными характеристиками” [175. С. 90]. В качестве структурного состава этой деятельности обычно выделяют: предварительный анализ, построение схемы, работа с “реальностью” при помощи схемы.

Рассмотрим, например, структурно-логическую схему изучения темы “Элементарные функции”, которую разработала И. Н. Мурина [137]:

I курс Математический анализ, элементарная математика и ПРМЗ. Формирование понятия целостного математического объекта – класс элементарных функций.

Графики.

Методы “согласования” и дифференциальное исчисление. Метод геометрических преобразований.

Моделирование.

Задачи оптимизации (f'). Текстовые задачи на составление уравнений и неравенств.

Средство конкретизации.

Предел, производная; $e^x = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$; $\ln x = \lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x}-1)$.

Алгебраические уравнения и неравенства (графический метод решения, использование множества значений функции и т.д.).

II курс Математический анализ. Интегрирование в конечном виде.

Неэлементарные функции. $\operatorname{arctg} x = \int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^2}$; $\ln x = \int\limits_1^x \frac{dt}{t}$; $e^x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Элементарная математика и ПРМЗ. Показательные, показательно-степенные, логарифмические уравнения и неравенства.

Прогрессии. Тригонометрические уравнения и неравенства.

III курс Математический анализ. Дифференциальные уравнения для e^x, $\sin x$, $\cos x$.

Элементарные функции в комплексных областях.

Курсовые работы: различные методы изучения основных элементарных функций.

Элементарная математика и ПРМЗ. Планиметрия, стереометрия.

МПМ. Построение наглядной методической модели организации деятельности школьников по усвоению общих функциональных понятий.

IV курс Математический анализ. Структура внутренних взаимосвязей.

Элементарная математика и ПРМЗ. Задачи с параметрами: уравнения и неравенства, содержащие трансцендентные функции и параметр.

МПМ. Построение наглядной методической модели организации деятельности школьников по изучению алгебраических функций. Анализ школьных учебников разных авторов.

Курсовая работа: применение различных видов наглядного обучения при изучении функционально-графической линии.

V курс **Элементарная математика и ПРМЗ.** Нестандартные задачи, задачи исследовательского характера с функциональным содержанием.

МПМ. Построение наглядной методической модели организации деятельности школьников по изучению трансцендентных функций.

Систематизация знаний по вариативности исследования элементарной функции.

Дипломные работы.

Эта сквозная тема изучается на протяжении всех лет обучения математике в педвузе и является ключевой в профессиональной подготовке будущего учителя математики.

Таким образом, критериями устойчивости перцептивного образа выступают: схематизация, целостность математического объекта и учет закономерностей психофизиологических аспектов восприятия, мышления и памяти.

3.1.3. Уровень учебной деятельности

Управление познавательной деятельностью обучаемых в процессе наглядного моделирования в обучении математике является основным содержательным компонентом педагогической технологии и полностью определяется совместной деятельностью учителя и обучаемых.

Наглядное моделирование в обучении – это определенный вид деятельности как учителя, так и ученика. Действие должно быть адекватно знанию, которое усваивается, при этом активная мыслительная деятельность обучаемых значительно обогащает процесс восприятия учебного материала. Таким образом, **внешние действия учителя и внутренние действия обучаемых** по выявлению содержания и формированию представлений являются неотъемлемыми элементами структуры наглядного моделирования в обучении.

Согласно теории поэтапного формирования умственных действий и понятий (П. Я. Гальперин, Н. Ф. Талызина), центральной идеей является усвоение знаний в результате выполнения учениками определенной системы умственных действий. Овладение умственным действием происходит в процессе интериоризации соответствующего внешнего практического действия. Выделены следующие этапы интериоризации: этап составления ориентировочной основы действия (предметное действие), этап материальной предметной деятельности (работа с реальными предметами) или материализованной деятельности (работа с моделями), этап формирования действия как внешнеречевого, этапы внутреннего умственного действия [50].

Процесс обучения со стороны обучающего представляет собой цепь отдельных внешних действий $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, связанных общей дидактической задачей. Каждое внешнее действие при постановке дидактической задачи предполагает наличие результатов внутренних действий $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$, полученных в процессе обучения в сознании обучаемых так, что имеет место некоторое соответствие:

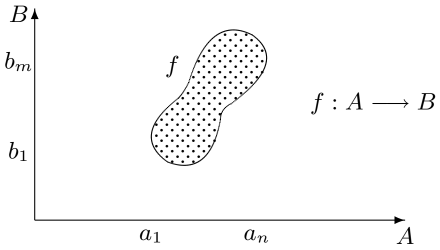


Рис. 30

Таким образом, дидактическая схема определяется соответствием $f : A \longrightarrow B$. При этом каждому внешнему действию, как правило, соответствует несколько результатов внутренних действий.

Процесс обучения есть взаимосвязь дидактической схемы (S) и ее реализации (S'). Пусть $f : A \longrightarrow B$ – дидактическая схема и $g : A \longrightarrow B$ – ее реализация:

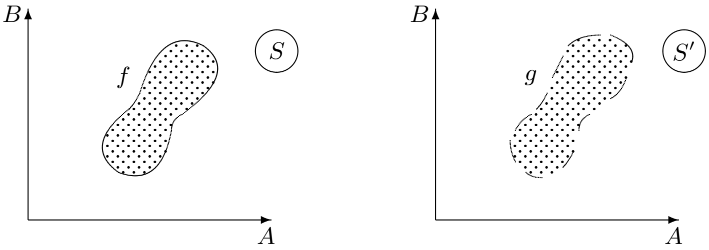


Рис. 31

Пусть $\mathtt{B}$ – булеан множества B, $i : A \longrightarrow A$ и $I : \mathtt{B} \longrightarrow \mathtt{B}$ – тождественные отображения. Будем говорить, что в процессе обучения (S, S') формируется адекватный категории цели результат, если для внешнего действия $a \in A$ коммутативна диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
f(a) \arrow[r, "I"] & g(a) \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"] & a \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

(здесь коммутативность диаграммы означает $g \circ i = I \circ f$).

Таким образом, наглядность в процессе обучения предполагает прежде всего наличие обоснованной дидактической схемы $f : A \longrightarrow B$, где A – внешние действия обучаемого, B – желаемые результаты внутренних действий, вызываемых внешними, причем обоснованность дидактической схемы следует понимать как коллективный опыт математической мысли в той или иной области. В процессе реализации дидактической схемы естественным образом возникает соответствие $g : A \longrightarrow B$, причем основные компоненты множества $g(a)$, где $a \in A$, определяются путем проведения контролирующих мероприятий или путем анализа противоречий психологического, логического, дидактического, математического характера, возникающих в процессе обучения. Поэтому отсутствие или недостаточность наглядности в обучении всегда есть наличие противоречий между внешними действиями обучающего и внутренним механизмом восприятия обучаемых.

Процесс формирования адекватного категории цели результата может занимать длительный промежуток времени. Так, узловым, опорным понятием в курсе математики средней школы является понятие числа. Однако процесс формирования понятия числа как характерного, специфического для математики понятия во всем разнообразии логических взаимосвязей, исторических подходов, практических навыков оперирования с ним пронизывает весь курс математики, начиная с первого класса. Процесс восприятия (особенно при больших объемах информации) учебного материала предполагает наличие узловых, опорных, характерных, специфических качеств объекта восприятия, будь то отдельное знание или организованный набор знаний (это может быть доказательство теорем, раздел курса математики во всем разнообразии логических взаимосвязей, материал отдельного урока или лекции и т. д.). Именно выделение и формирование этих узловых опорных качеств объекта восприятия (модель) и представляет собой суть наглядности в обучении. Поэтому при таком обучении стадии непосредственного восприятия должна предшествовать стадия выделения в объекте восприятия узловых, опорных качеств (целевая установка).

При разной трактовке категории цели процесс обучения математике может быть наглядным для одной целевой установки и не наглядным для другой. Например, для физиков при формировании понятия производной узловым, опорным качеством является производная как скорость движения точек, в то же время для математиков более важным опорным качеством является производная как предел разностного отношения. Поэтому и набор приемов и средств наглядности будет разным.

Внешние действия в процессе наглядного моделирования в обучении математике в зависимости от ориентации на чувственный или рациональный элемент восприятия будем подразделять на опорные и структурные. К опорным внешним действиям отнесем: запись формулы, таблицы, показ модели, диапозитива, кинофильма, оформление чертежа, графика, схемы, формулировку теоремы, научно-исследовательских задач, предложения, использование печатных пособий. Опорность внешнего действия не связана временным интервалом: оно может длиться, например, 2–4 минуты и несколько раз появляться в течение урока, а может осуществляться перманентно. Однако задание опорного внешнего действия предполагает продуманность временных интервалов как по числу, так и по длительности.

К структурным внешним действиям отнесем доказательство теорем, предложений, отбор материала, его дозировку, отбор упражнений и задач для урока, отбор и дозировку исторического материала, пропедевтику основных понятий и методов доказательств, программированное обучение, осуществление межпредметных связей. Каждое структурное внешнее действие представляет собой упорядоченный набор опорных внешних действий, связанных единым началом, единой целью.

Если опорные внешние действия в большей степени опираются на долговременную память, ассоциации, возможности механизма восприятия, т.е. на рациональное восприятие, то психолого-педагогической основой для выделения структурных внешних действий является принцип опережающего отражения. Основным здесь является способность обучаемого к сохранению следов рационально-чувственного восприятия в нейрофизиологическом механизме памяти. Так, в процессе обучения между следами рационально-чувственного восприятия и внешними действиями возникают временные связи. Чем больше необходимых связей будет ассоциировано в процессе обучения, тем глубже и качественнее усвоение учебного материала, прочнее чувственно-рациональная основа дальнейшего обучения.

Схема 11

Педагогическая технология наглядного моделирования в обучении математике

Транслятор

Концепция наглядного моделирования в обучении математике

Вербальный (книга, компьютер, учитель, речь,...), невербальный (знак и символ, аудиовидеосредства,...) комбинированный (мультимедиа,...)

Дидактическая система

Диагностируемое целеполагание

Теоретический модуль			Прикладной модуль		
Уровень глобальной структуры	Уровень локальной модельности	Управление познавательной деятельностью	Уровень глобальной структуры	Уровень локальной модельности	Управление познавательной деятельностью
спиралей фундирования (знания), аннотированных экзаменационных программ, базовых учебных материалов (знания), учебных модулей, мотивационных блоков фреймов знаний	логических моделей кодирования семантических сетей, структурных блок-схем алгоритмов, таблиц устойчивых ассоциаций	продукционных моделей установок фоновой наглядности, когнитивной визуализации математических и дидактических методов	спиралей фундирования (умение–навык), базовых умений и навыков аннотированных экзаменационных программ (умения, навыки), фреймов действия	алгоритмов процедур обобщенных умений реляционных моделей схем	компьютерных технологий, укрупнений дидактических единиц, мотивационных блоков, вариативной конкретизации, когнитивной визуализации

Вероятностно гарантированные результаты обучения

Интегральное использование технологических элементов позволяет получить вероятностно гарантированные результаты обучения в условиях познавательной и творческой активности студентов и оптимальных затрат учебного времени. Применение компьютерных технологий обеспечивает замкнутый и направленный учебный процесс [23].

3.2. Лабораторный практикум по численным методам в математике с использованием графического калькулятора

В данном пункте представлен разработанный одним из авторов, В. В. Богуном, лабораторный практикум по численным методам в математике для студентов II курса педагогических вузов, включающий описание четырех лабораторных работ с рассмотрением соответствующих авторских программ для графического калькулятора *CASIO ALGEBRA FX 2.0 PLUS* и методики их использования.

Основная цель лабораторного практикума состоит в использовании графического калькулятора как средства интеграции математических и информационных знаний при выполнении численных алгоритмов, суть которых заключается в построении и визуализации итерационных процессов, сходящихся к искомому решению.

Названия лабораторных работ с указанием наименований программ и соответствующих разделов высшей математики:

1. Расчет значений минимальных номеров приближения к пределу числовых последовательностей вида $x_n = \frac{a_2 n^2 + a_1 n + a_0}{b_2 n^2 + b_1 n + b_0}$ (для $\varepsilon > 0$, $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $\left| x_n - \frac{a_2}{b_2} \right| < \varepsilon$) с использованием методов золотой пропорции, Фибоначчи, дихотомии и их сравнительный анализ (программа *“MINNESQS”*, раздел *“Пределы и непрерывность”*).

2. Приближенные решения алгебраических и трансцендентных уравнений с использованием метода дихотомии (бисекции), комбинированного метода хорд и касательных (Ньютона), метода итераций и их сравнительный анализ (программа *“APROXEQU”*, раздел *“Дифференциальное исчисление”*).

3. Приближенные вычисления значений определенных интегралов по формулам средних прямоугольников, трапеций, параболических трапеций (Симпсона) и их сравнительный анализ (программа *“APROXINT”*, раздел *“Интегральное исчисление”*).

4. Приближенные решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с использованием методов Эйлера, Рунге-Кутта второго, четвертого порядков точности и их сравнительный анализ (программа *“APROXDFE”*, раздел *“Дифференциальные уравнения”*).

Содержание и структура лабораторных работ:

1. Название работы с указанием наименования программы и соответствующего раздела высшей математики.
2. Цель работы.
3. Теоретический аспект.
4. Описание этапов проведения лабораторной работы.
5. Описание программы с примером.

Цели и задачи лабораторных работ:

1. *Математические:*

✓ исследование функциональных зависимостей;

✓ освоение численных методов решений математических задач;

✓ сравнительный анализ эффективности вычислительных процедур.

2. *Информационные:*

✓ освоение функциональных возможностей графического калькулятора (функции, опции, режимы, коммуникации);

✓ освоение среды программирования графического калькулятора;

✓ навыки создания алгоритмов, блок-схем и программ для решения математических задач.

3. *Личностные:*

✓ развитие математической, информационной и алгоритмической культуры студентов;

✓ творческая активность (анализ результатов с выдвижением и проверкой гипотез, варьирование данных, оптимизация мыслительных процессов);

✓ коммуникативная и ролевая деятельность студентов на примере малых групп в процессе интеграции знаний, умений и навыков изучения математики с использованием информационных технологий;

✓ мотивация к изучению математических и информационных дисциплин.

4. *Профессиональные:*

✓ наглядное моделирование объектов и процессов;

✓ визуализация итерационных процессов;

✓ интеграция математических и информационных процессов;

✓ управление процессами познавательной деятельности учащихся.

Методика проведения лабораторных работ:

1. Актуализация знаний и контроль теоретических аспектов и практических навыков по использованию графического калькулятора.

2. Формулировка названия, цели и плана проведения лабораторной работы.

3. Рассмотрение реализации решения математической задачи на показательном примере.

4. Распределение студентов на малые группы по 3-4 человека с целью задания различных вариантов исходных данных.

5. Наглядное моделирование и решение предлагаемой математической задачи с применением трех численных методов на основе интеграции математических и информационных знаний с использованием графического калькулятора.

6. Рефлексия и проведение сравнительного анализа полученных результатов с целью формулировки выводов и проверки гипотез.

7. Оформление лабораторной работы с последующей сдачей преподавателю.

8. Презентация результатов.

9. Индивидуальные собеседования или проверочное тестирование.

Основные особенности представленных в лабораторных работах авторских программ:

1. Реализация принципа сохранения значений исходных данных и результатов расчетов в соответствующих матрицах (в режиме выполнения арифметических и матричных расчетов *“RUN.MATrix”*).

2. Реализация принципа сохранения значений промежуточных вычислений в соответствующих последовательно идущих списках (в режиме выполнения статистических расчетов *“STATistics”*).

3. Интеллектуальная и удобная в использовании система навигации внутри программы в виде совокупности последовательных меню с корректной обработкой ошибок ввода необходимых параметров.

4. Возможность варьирования различных параметров и исходных данных непосредственно при работе внутри программы.

5. Возможность проведения статистического (сравнительного) анализов получаемых при реализации различных численных методов решения математических задач промежуточных вычислений (итоговых результатов) после окончательного выполнения программы (в процессе или после окончательного выполнения программы).

Преимущества использования графического калькулятора при проведении предлагаемых лабораторных работ:

1. Мобильность и автономность использования в сочетании с низким энергопотреблением.

2. Автоматизация выполнения большого количества необходимых рутинных однообразных вычислений при решении математических задач на основе применения численных методов с возможностью проведения статистических расчетов после окончательного выполнения программы.

3. Автоматизация выполнения сравнительного анализа результатов численных методов решения математических задач непосредственно как внутри программы, так и после ее окончательного выполнения.

4. Автоматизация проведения необходимых расчетов в результате варьирования значений исходных данных.

Таким образом, использование графического калькулятора в процессе обучения математике выполняет мотивационную, обучающую, развивающую и контролирующую функции, способствуя эффективному процессу формирования математических, информационных и методических умений будущего учителя математики.

3.2.1. Лабораторная работа № 1

Название работы с указанием имени программы и соответствующего раздела высшей математики: расчет значений минимальных номеров приближения к пределу числовых последовательностей вида $x_n = \frac{a_2n^2+a_1n+a_0}{b_2n^2+b_1n+b_0}$ (для $\varepsilon > 0$, $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $\left|x_n - \frac{a_2}{b_2}\right| < \varepsilon$) с использованием методов золотой пропорции, Фибоначчи, дихотомии и их сравнительный анализ (программа *“MINNESQS”*, раздел *“Пределы и непрерывность”*).

Цель работы: осуществить расчет значений минимальных номеров приближения к пределу числовых последовательностей вида $x_n = \frac{a_2n^2+a_1n+a_0}{b_2n^2+b_1n+b_0}$ (для $\varepsilon > 0$, $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $\left|x_n - \frac{a_2}{b_2}\right| < \varepsilon$) с использованием методов золотой пропорции, Фибоначчи, дихотомии для различных условий варьирования значений исходных данных с последующим проведением необходимых сравнительных анализов вычислительных процедур с применением представленной в графическом калькуляторе программы *“MINNESQS”*.

Теоретический аспект

Число A называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число n_ε, что для любого $n > n_\varepsilon$ верно неравенство: $|x_n - A| < \varepsilon$.

Рассмотрим числовые последовательности вида:

$$x_n = \frac{a_2 n^2 + a_1 n + a_0}{b_2 n^2 + b_1 n + b_0},$$

где a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 – целые числа, причем $a_2 \neq 0$ и $b_2 \neq 0$.

Пределом числовых последовательностей является отношение:

$$A = \lim_{n \to \infty} x_n = \frac{a_2}{b_2}.$$

Необходимо осуществить расчет значений минимальных номеров n_ε числовых последовательностей $\{x_n\}$ по заданным $\varepsilon > 0$, таких, что для всех членов числовых последовательностей со значениями номеров $n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$ в соответствии с различными условиями варьирования значений исходных данных.

Рассмотрим функцию $|f\,(n)| = |x_n - A|$:

$$|f(n)| = \left| \frac{a_2 n^2 + a_1 n + a_0}{b_2 n^2 + b_1 n + b_0} - \frac{a_2}{b_2} \right| = \left| \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)\, n + a_0 b_2 - a_2 b_0}{b_2\,(b_2 n^2 + b_1 n + b_0)} \right|.$$

От рассмотрения функции $|f\,(n)|$ перейдем к рассмотрению функции $f\,(n)$ (экстраполируя $f\,(n)$ на положительную R^+), так как график функции $|f\,(n)|$ отличается от графика функции $f\,(n)$ (в смысле выяснения особенностей, т.е. действительных точек разрыва и экстремума) только появлением дополнительной действительной угловой точки графика на оси абсцисс:

$$f(n) = \frac{a_2 n^2 + a_1 n + a_0}{b_2 n^2 + b_1 n + b_0} - \frac{a_2}{b_2} = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)\, n + a_0 b_2 - a_2 b_0}{b_2\,(b_2 n^2 + b_1 n + b_0)}.$$

Для определения действительных точек разрыва функции $f\,(n)$, то есть действительных точек несуществования функции $f\,(n)$, необходимо решить уравнение $b_2 n^2 + b_1 n + b_0 = 0$ ($b_2 \neq 0$ в силу существования предела последовательности).

В силу решения квадратного уравнения возможны следующие варианты наличия у функции $f\,(n)$ действительных точек разрыва ($D_{BP} = b_1^2 - 4 b_0 b_2$):

1. Если $D_{BP} < 0$, то функция $f(n)$ не имеет действительных точек разрыва и непрерывна на всей числовой оси.

2. Если $D_{BP} = 0$, то функция $f(n)$ имеет одну действительную точку разрыва со следующим значением абсциссы: $n_{BP} = \frac{-b_1}{2b_2}$.

3. Если $D_{BP} > 0$, то функция $f(n)$ имеет две действительные точки разрыва со следующими значениями абсцисс:

$$n_{BP1,BP2} = \frac{-b_1 \pm \sqrt{D_{BP}}}{2b_2} = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_0 b_2}}{2b_2}.$$

Для определения действительных точек экстремума функции $f(n)$, то есть действительных точек, в которых данная функция имеет максимум или минимум, необходимо решить уравнение $f'(n) = 0$ и выявить характер действительных критических точек.

$$\begin{aligned}
&f'(n) = \tfrac{1}{b_2}\left(\tfrac{(a_1b_2-a_2b_1)n+a_0b_2-a_2b_0}{b_2n^2+b_1n+b_0}\right)' = \\
&= \tfrac{1}{b_2}\left(\tfrac{(a_1b_2-a_2b_1)\left(b_2n^2+b_1n+b_0\right)-((a_1b_2-a_2b_1)n+a_0b_2-a_2b_0)(2b_2n+b_1)}{\left(b_2n^2+b_1n+b_0\right)^2}\right) = \\
&= \tfrac{(a_2b_1-a_1b_2)n^2+2(a_2b_0-a_0b_2)n+(a_1b_0-a_0b_1)}{b_2n^2+b_1n+b_0}.
\end{aligned}$$

В силу решения квадратного уравнения, левая часть которого представлена в числителе, а именно, $(a_2b_1 - a_1b_2)\,n^2 + 2\,(a_2b_0 - a_0b_2)\,n + (a_1b_0 - a_0b_1) = 0$ и влияния знаменателя возможны следующие варианты наличия у функции $f(n)$ действительных критических точек ($D_{EP} = 4\,(a_2b_0 - a_0b_2)^2 - 4\,(a_2b_1 - a_1b_2)\,(a_1b_0 - a_0b_1)$), причем $b_2 \neq 0$ в силу существования предела последовательности:

1. Если $D_{EP} < 0$, то функция $f(n)$ не имеет действительных критических точек.

2. Если $D_{EP} = 0$, то функция $f(n)$ должна иметь одну действительную критическую точку со следующим значением абсциссы: $n_{EP} = \frac{a_0b_2-a_2b_0}{a_2b_1-a_1b_2}$.

Действительно, если $D_{EP} = 0$, то есть $(a_2b_0 - a_0b_2)^2 = (a_2b_1 - a_1b_2) \cdot (a_1b_0 - a_0b_1)$ и $n_{EP} = \frac{a_0b_2-a_2b_0}{a_2b_1-a_1b_2}$, то получим:

$$\begin{aligned}
&(a_2b_1 - a_1b_2)\,n_{EP}^2 + 2\,(a_2b_0 - a_0b_2)\,n_{EP} + (a_1b_0 - a_0b_1) = \\
&(a_2b_1-a_1b_2)\left(\tfrac{a_0b_2-a_2b_0}{a_2b_1-a_1b_2}\right)^2+2\,(a_2b_0-a_0b_2)\left(\tfrac{a_0b_2-a_2b_0}{a_2b_1-a_1b_2}\right)+(a_1b_0-a_0b_1)= \\
&-\tfrac{(a_0b_2-a_2b_0)^2}{a_2b_1-a_1b_2} + (a_1b_0 - a_0b_1) = -\,(a_1b_0 - a_0b_1) + (a_1b_0 - a_0b_1) = 0.
\end{aligned}$$

Однако при соблюдении предлагаемых договоренностей имеем:

$$\begin{aligned}&b_2n_{EP}^2+b_1n_{EP}+b_0=b_2\left(\tfrac{a_0b_2-a_2b_0}{a_2b_1-a_1b_2}\right)^2+b_1\left(\tfrac{a_0b_2-a_2b_0}{a_2b_1-a_1b_2}\right)+b_0=\\&=b_2\tfrac{a_1b_0-a_0b_1}{a_2b_1-a_1b_2}+b_1\left(\tfrac{a_0b_2-a_2b_0}{a_2b_1-a_1b_2}\right)+b_0=\\&=\tfrac{a_1b_0b_2-a_0b_1b_2+a_0b_1b_2-a_2b_0b_1+a_2b_0b_1-a_1b_0b_2}{a_2b_1-a_1b_2}=0.\end{aligned}$$

Таким образом, если $D_{EP}=0$, то $b_2n_{EP}^2+b_1n_{EP}+b_0=0$, что противоречит условию существования производной функции $f'(n)$, то есть при данных условиях функция $f(n)$ не имеет действительных критических точек.

3. Если $D_{EP}>0$, то функция $f(n)$ должна иметь две действительные критические точки со следующими значениями абсцисс:

$$\begin{aligned}&n_{EP1,EP2}=\tfrac{2(a_0b_2-a_2b_0)\pm\sqrt{D_{EP}}}{2(a_2b_1-a_1b_2)}=\\&=\tfrac{a_0b_2-a_2b_0\pm\sqrt{(a_2b_0-a_0b_2)^2-(a_2b_1-a_1b_2)(a_1b_0-a_0b_1)}}{a_2b_1-a_1b_2}.\end{aligned}$$

3.1. Если при $n_{EP1}=\tfrac{2(a_0b_2-a_2b_0)+\sqrt{D_{EP}}}{2(a_2b_1-a_1b_2)}$ получим, что $b_2n_{EP1}^2+b_1n_{EP1}+b_0=0$, то функция $f(n)$ имеет только одну действительную критическую точку со следующим значением абсциссы:

$$n_{EP2}=\frac{a_0b_2-a_2b_0-\sqrt{(a_2b_0-a_0b_2)^2-(a_2b_1-a_1b_2)\,(a_1b_0-a_0b_1)}}{a_2b_1-a_1b_2}.$$

3.2. Если при $n_{EP2}=\tfrac{2(a_0b_2-a_2b_0)-\sqrt{D_{EP}}}{2(a_2b_1-a_1b_2)}$ получим, что $b_2n_{EP2}^2+b_1n_{EP2}+b_0=0$, то функция $f(n)$ имеет только одну действительную критическую точку со следующим значением абсциссы:

$$n_{EP1}=\frac{a_0b_2-a_2b_0+\sqrt{(a_2b_0-a_0b_2)^2-(a_2b_1-a_1b_2)\,(a_1b_0-a_0b_1)}}{a_2b_1-a_1b_2}.$$

3.3. Если при $n_{EP1},n_{EP2}=\tfrac{2(a_0b_2-a_2b_0)\pm\sqrt{D_{EP}}}{2(a_2b_1-a_1b_2)}$ получим, что $b_2n_{EP1,EP2}^2+b_1n_{EP1,EP2}+b_0\neq0$, то функция $f(n)$ имеет две действительные критические точки со следующими значениями абсцисс:

$$n_{EP1,EP2}=\frac{a_0b_2-a_2b_0\pm\sqrt{(a_2b_0-a_0b_2)^2-(a_2b_1-a_1b_2)\,(a_1b_0-a_0b_1)}}{a_2b_1-a_1b_2}.$$

Нахождение действительной угловой точки осуществляется в результате анализа функции $|f(n)|$:

$$|f(n)| = \left|\frac{a_2n^2 + a_1n + a_0}{b_2n^2 + b_1n + b_0} - \frac{a_2}{b_2}\right| = \left|\frac{(a_1b_2 - a_2b_1)\,n + a_0b_2 - a_2b_0}{b_2^2n^2 + b_1b_2n + b_0b_2}\right|.$$

Действительная угловая точка означает пересечение графика функции $|f(n)|$ с осью абсцисс, то есть точку, в которой график функции резко меняет направление в силу зеркального отображения отрицательных областей графика функции $f(n)$ относительно оси абсцисс.

Для определения действительной угловой точки функции $|f(n)|$, то есть точки, в которой функции $|f(n)|$ и $f(n)$ пересекают ось абсцисс, необходимо решить уравнение $f(n) = 0$:

$$f(n) = \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)\,n + a_0b_2 - a_2b_0}{b_2\,(b_2n^2 + b_1n + b_0)}.$$

В силу решения линейного уравнения, левая часть которого представлена в числителе, а именно, $(a_1b_2 - a_2b_1)\,n + a_0b_2 - a_2b_0 = 0$ и влияния знаменателя возможны следующие варианты наличия у функции $|f(n)|$ действительных угловых точек, причем $b_2 \neq 0$ в силу существования предела последовательности:

1. Если $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, то функция $|f(n)|$ не имеет действительной угловой точки.

2. Если $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, то функция $|f(n)|$ должна иметь одну действительную угловую точку со следующим значением абсциссы: $n_{AP} = \frac{a_2b_0 - a_0b_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$.

2.1. Если при $n_{AP} = \frac{a_2b_0 - a_0b_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$ получим, что $b_2n_{AP}^2 + b_1n_{AP} + b_0 = 0$, то функция $|f(n)|$ не имеет действительной угловой точки;

2.2. Если при $n_{AP} = \frac{a_2b_0 - a_0b_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$ получим, что $b_2n_{AP}^2 + b_1n_{AP} + b_0 \neq 0$, то функция $|f(n)|$ имеет одну действительную угловую точку со следующим значением абсциссы: $n_{AP} = \frac{a_2b_0 - a_0b_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$.

После нахождения действительных точек разрыва (n_{BP1},n_{BP2} или n_{BP}), точек экстремума (n_{EP1},n_{EP2} или n_{EP}) и угловой точки (n_{AP}) для функции $|f(n)|$ определим отрезок $[n_{A0}, n_{B0}]$ с условием $n_{A0} < n_{B0}$, на котором следует осуществлять нахождение значения минимального номера n_ε, где n_{B0} – минимальный номер, теоретически найденный аналитическим методом, а значение n_{A0} определяется из выражения $n_{A0} = \max\{n_{BP1}(n_{BP}), n_{BP2}, n_{EP1}(n_{EP}),\ n_{EP2}, n_{AP}\}$, при этом для дальнейших расчетов в случаях наличия дробных частей значения граничных номеров следует округлять до больших ближайших целых чисел.

Порядок нахождения значения n_{A0} в силу особенностей функции $|f\,(n)|$ состоит из следующих этапов:

1. При отсутствии у функции $|f\,(n)|$ действительных точек разрыва $n_{A01} = -\infty$;

2. При наличии у функции $|f\,(n)|$ одной действительной точки разрыва $n_{A01} = n_{BP}$;

3. При наличии у функции $|f\,(n)|$ двух действительных точек разрыва если $n_{BP1} > n_{BP2}$, то $n_{A01} = n_{BP1}$, если $n_{BP1} < n_{BP2}$, то $n_{A01} = n_{BP2}$;

4. При отсутствии у функции $|f\,(n)|$ действительных точек экстремума $n_{A02} = -\infty$;

5. При наличии у функции $|f\,(n)|$ одной действительной точки экстремума если $|f\,(n_{EP})| < \varepsilon$, то $n_{A02} = -\infty$, если $\left|f\,(n)_{EP}\right| > \varepsilon$, то $n_{A02} = n_{EP}$;

6. При наличии у функции $|f\,(n)|$ двух действительных точек экстремума если $|f\,(n_{EP1})| < \varepsilon$, то $n_{A021} = -\infty$, если $|f\,(n_{EP1})| > \varepsilon$, то $n_{A021} = n_{EP1}$;

7. При наличии у функции $|f\,(n)|$ двух действительных точек экстремума если $|f\,(n_{EP2})| < \varepsilon$, то $n_{A022} = -\infty$, если $|f\,(n_{EP2})| > \varepsilon$, то $n_{A022} = n_{EP2}$;

8. При наличии у функции $|f\,(n)|$ двух действительных точек экстремума если $n_{A021} > n_{A022}$, то $n_{A02} = n_{A021}$, если $n_{A021} < n_{A022}$, то $n_{A02} = n_{A022}$;

9. При отсутствии у функции $|f\,(n)|$ действительной угловой точки $n_{A03} = -\infty$;

10. При наличии у функции $|f\,(n)|$ одной действительной угловой точки $n_{A03} = n_{AP}$;

11. В качестве n_{A0} выбирается округленное до большего ближайшего целого числа максимальное из значений n_{A01}, n_{A02} и n_{A03}.

Рассмотрим логические основы реализации методов золотой пропорции, Фибоначчи, дихотомии для выполнения приближенных вычислений значений пределов числовых последовательностей вида $x_n = \frac{a_2n^2+a_1n+a_0}{b_2n^2+b_1n+b_0}$ (для $\varepsilon > 0$, $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $\left|x_n - \frac{a_2}{b_2}\right| < \varepsilon$) на основе расчетов значений минимальных номеров приближения к пределу n_ε в зависимости от различных значений ε, n_{A0} и n_{B0}, заложенных в программу *“MINNESQS”*.

Метод золотой пропорции

Суть золотой пропорции, изображенной на рис. 32, состоит в следующем: если разделить отрезок C на отрезки A и B таким образом, что это будет отражать золотую пропорцию, то A, деленное на B, будет равно C, деленному на A.

Символьная запись: $\frac{C}{A} = \frac{A}{B} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618033989$.

Рис. 32. Золотая пропорция

Действительно, пусть $\frac{C}{A} = \frac{A}{B} = X$.

Так как $A+B = C$ или $\frac{A}{A}+\frac{B}{A} = \frac{C}{A}$, то получим квадратное уравнение:

$$1 + \frac{1}{X} = X \Rightarrow X^2 - X - 1 = 0.$$

Положительный действительный корень квадратного уравнения:

$$X = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618033989.$$

По аналогии с пропорцией назовем число φ золотым.

Одно из общеизвестных алгебраических свойств золотого числа заключается в следующем: золотое число, возведенное в степень с натуральным показателем, равно сумме двух золотых чисел, возведенных в две предшествующие степени: $\varphi^N = \varphi^{N-1} + \varphi^{N-2}$.

Действительно, так как $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, то $\varphi^2 = \varphi + 1$ или $\varphi^{N-2} \cdot \varphi^2 = \varphi^{N-2} \cdot \varphi + \varphi^{N-2}$, откуда $\varphi^N = \varphi^{N-1} + \varphi^{N-2}$.

Поскольку $\varphi^N = \varphi^{N-1} + \varphi^{N-2}$, то $\varphi^N = \varphi^{N+2} - \varphi^{N+1}$, откуда можно получить следующие соотношения:

$$\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1,\ \frac{1}{\varphi^2} = 1 - \frac{1}{\varphi} = 2 - \varphi,\ \frac{1}{\varphi^3} = \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi^2} = 1 - \frac{2}{\varphi^2} = \frac{2}{\varphi} - 1 = 2\varphi - 3.$$

В данной лабораторной работе метод золотой пропорции *(“METHOD OF GOLD PROPORTION”)* имеет следующую реализацию:

1. Итерация с индексом “0″:

1.1. На искомом отрезке $[n_{A0}, n_{B0}]$ при соблюдении условий $n_{A0} < n_{B0}$ и $|f(n_{A0})| \geq \varepsilon > |f(n_{B0})|$ (по умолчанию значения n_{A0} и n_{B0} являются целыми числами) выбираются точки с абсциссами n_{C0}^{GP} и n_{D0}^{GP}, исходя из неравенств $n_{A0} < n_{C0}^{GP} < n_{D0}^{GP} < n_{B0}$ и $|f(n_{A0})| > \left|f\left(n_{C0}^{GP}\right)\right| > \left|f\left(n_{D0}^{GP}\right)\right| > |f(n_{B0})|$, в соответствии с принципами золотой пропорции согласно следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} n_{C0}^{GP} &= n_{A0} + \tfrac{n_{B0}-n_{A0}}{\varphi^2} = n_{B0} - \tfrac{n_{B0}-n_{A0}}{\varphi}, \\ n_{D0}^{GP} &= n_{A0} + \tfrac{n_{B0}-n_{A0}}{\varphi} = n_{B0} - \tfrac{n_{B0}-n_{A0}}{\varphi^2}. \end{aligned}$$

1.2. При наличии положительных дробных частей значения n_{C0}^{GP} и n_{D0}^{GP} округляются до ближайших больших целых чисел.

1.3. Если достигнута истинность выражения $n_{B0} - n_{A0} = 1$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_{\varepsilon}^{GP} = 0$, и в качестве минимального номера n_{ε}^{GP} выбирается $n_{\varepsilon}^{GP} = n_{A0}$ в силу неравенства $|f(n_{A0})| \geq \varepsilon > |f(n_{B0})|$.

1.4. Если $n_{B0} - n_{A0} \neq 1$, то осуществляется переход к следующей итерации.

2. Итерация с индексом “N″ ($N \geq 1$):

2.1. Если $\left|f\left(n_{C(N-1)}^{GP}\right)\right| < \varepsilon$, то $n_{AN}^{GP} = n_{A(N-1)}^{GP}$, $n_{BN}^{GP} = n_{C(N-1)}^{GP}$, $n_{BN}^{GP} - n_{AN}^{GP} = n_{C(N-1)}^{GP} - n_{A(N-1)}^{GP} = \frac{n_{B(N-1)}^{GP} - n_{A(N-1)}^{GP}}{\varphi^2}$, и получаем отрезок $\left[n_{AN}^{GP}, n_{BN}^{GP}\right] = \left[n_{A(N-1)}^{GP}, n_{C(N-1)}^{GP}\right]$.

2.2. Если $\left|f\left(n_{C(N-1)}^{GP}\right)\right| \geq \varepsilon$ и $\left|f\left(n_{D(N-1)}^{GP}\right)\right| < \varepsilon$, то $n_{AN}^{GP} = n_{C(N-1)}^{GP}$, $n_{BN}^{GP} = n_{D(N-1)}^{GP}$, $n_{BN}^{GP} - n_{AN}^{GP} = n_{D(N-1)}^{GP} - n_{C(N-1)}^{GP} = \frac{n_{B(N-1)}^{GP} - n_{A(N-1)}^{GP}}{\varphi^3}$, и получаем отрезок $\left[n_{AN}^{GP}, n_{BN}^{GP}\right] = \left[n_{C(N-1)}^{GP}, n_{D(N-1)}^{GP}\right]$.

2.3. Если $\left|f\left(n_{D(N-1)}^{GP}\right)\right| \geq \varepsilon$, то $n_{AN}^{GP} = n_{D(N-1)}^{GP}$, $n_{BN}^{GP} = n_{B(N-1)}^{GP}$, $n_{BN}^{GP} - n_{AN}^{GP} = n_{B(N-1)}^{GP} - n_{D(N-1)}^{GP} = \frac{n_{B(N-1)}^{GP} - n_{A(N-1)}^{GP}}{\varphi^2}$, и получаем отрезок $\left[n_{AN}^{GP}, n_{BN}^{GP}\right] = \left[n_{D(N-1)}^{GP}, n_{B(N-1)}^{GP}\right]$.

2.4. На отрезке $\left[n_{AN}^{GP}, n_{BN}^{GP}\right]$ при соблюдении условий $n_{AN}^{GP} < n_{BN}^{GP}$ и $\left|f\left(n_{AN}^{GP}\right)\right| \geq \varepsilon > \left|f\left(n_{BN}^{GP}\right)\right|$ выбираются точки с абсциссами n_{CN}^{GP} и n_{DN}^{GP}, исходя из неравенств $n_{AN}^{GP} < n_{CN}^{GP} < n_{DN}^{GP} < n_{BN}^{GP}$ и $\left|f\left(n_{AN}^{GP}\right)\right| > \left|f\left(n_{CN}^{GP}\right)\right| > \left|f\left(n_{DN}^{GP}\right)\right| > \left|f\left(n_{BN}^{GP}\right)\right|$, в соответствии с принципами золотой пропорции согласно следующим соотношениям:

$$n_{CN}^{GP} = n_{AN}^{GP} + \frac{n_{BN}^{GP} - n_{AN}^{GP}}{\varphi^2} = n_{BN}^{GP} - \frac{n_{BN}^{GP} - n_{AN}^{GP}}{\varphi},$$

$$n_{DN}^{GP} = n_{AN}^{GP} + \frac{n_{BN}^{GP} - n_{AN}^{GP}}{\varphi} = n_{BN}^{GP} - \frac{n_{BN}^{GP} - n_{AN}^{GP}}{\varphi^2}.$$

2.5. При наличии положительных дробных частей значения n_{CN}^{GP} и n_{DN}^{GP} округляются до ближайших больших целых чисел.

2.6. Если достигнута истинность выражения $n_{BN}^{GP} - n_{AN}^{GP} = 1$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_\varepsilon^{GP} = N$, и в качестве минимального номера n_ε^{GP} выбирается $n_\varepsilon^{GP} = n_{AN}^{GP}$ в силу неравенства $\left|f\left(n_{AN}^{GP}\right)\right| \geq \varepsilon > \left|f\left(n_{BN}^{GP}\right)\right|$.

2.7. Если $n_{BN}^{GP} - n_{AN}^{GP} \neq 1$, то осуществляется переход к следующей итерации.

Метод Фибоначчи

Последовательность чисел Фибоначчи (открыта Леонардо Фибоначчи) отличается от других последовательностей чисел тем, что каждый ее член, начиная со второго по индексу, равен сумме двух предыдущих (с добавлением нулевого члена последовательности): 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 и так далее.

Действительно: $0+1=1$, $1+1=2$, $2+1=3$, $3+2=5$, то есть $F_K = F_{K-1} + F_{K-2}$, где F_K, F_{K-1} и F_{K-2} – члены последовательности Фибоначчи с индексами “K”, “$K-1$” и “$K-2$” соответственно.

Интересно отметить, что отношение значений соседних членов данной последовательности, начиная с больших номеров (при $K \to \infty$), приближается к золотому числу, то есть φ:

$$\frac{F_K}{F_{K-1}} \approx \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618033989,$$

где F_K и F_{K-1} – члены последовательности Фибоначчи с индексами “K” и “$K-1$” соответственно.

Для золотых чисел, возведенных в определенных степенях (геометрическая прогрессия со значениями начального члена и знаменателя, равными φ), как и для последовательности чисел Фибоначчи, справедливо общее правило о том, что значение каждого члена любой из этих последовательностей равно сумме значений двух предыдущих членов:

1. Формула для геометрической прогрессии золотых чисел: $\varphi^K = \varphi^{K-1} + \varphi^{K-2}$, где “$K$”, “$K-1$” и “$K-2$” – показатели степеней для золотого числа φ;

2. Формула для последовательности чисел Фибоначчи: $F_K = F_{K-1} + F_{K-2}$, где F_K, F_{K-1} и F_{K-2} – члены последовательности Фибоначчи с индексами “K”, “$K-1$” и “$K-2$” соответственно.

Поскольку $F_K = F_{K-1} + F_{K-2}$, то $F_{K-2} = F_K - F_{K-1}$, откуда можно получить следующие соотношения:

$$F_{K-3} = F_{K-1} - F_{K-2} = 2F_{K-1} - F_K = F_K - 2F_{K-2},$$
$$\frac{F_{K-3}}{F_K} = \frac{F_{K-1}}{F_K} - \frac{F_{K-2}}{F_K} = 2\frac{F_{K-1}}{F_K} - 1 = 1 - 2\frac{F_{K-2}}{F_K}.$$

Взаимосвязь между золотым числом и числами Фибоначчи выражается следующим соотношением: $\varphi^K = F_{K-1} + F_K \cdot \varphi$.

Докажем утверждение методом последовательного перебора:

$$\begin{aligned}
\varphi^1 &= \varphi^0 + \varphi^{-1} = 0 + 1 \cdot \varphi = F_0 + F_1 \cdot \varphi,\\
\varphi^2 &= \varphi^1 + \varphi^0 = \varphi + 1 = 1 + 1 \cdot \varphi = F_1 + F_2 \cdot \varphi,\\
\varphi^3 &= \varphi^2 + \varphi^1 = (F_1 + F_2 \cdot \varphi) + (F_0 + F_1 \cdot \varphi) =\\
&= (F_0 + F_1) + (F_1 + F_2) \cdot \varphi = F_2 + F_3 \cdot \varphi,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi^K &= \varphi^{K-1} + \varphi^{K-2} = (F_{K-2} + F_{K-1} \cdot \varphi) + (F_{K-3} + F_{K-2} \cdot \varphi) =\\
&= (F_{K-2} + F_{K-3}) + (F_{K-2} + F_{K-1}) \cdot \varphi = F_{K-1} + F_K \cdot \varphi.
\end{aligned}$$

В данной лабораторной работе метод Фибоначчи *(“METHOD OF FIBONACHCHI”)* имеет следующую реализацию:

1. Итерация с индексом “0”:

1.1. Осуществляется ввод значения индекса последнего члена ряда Фибоначчи для его построения, то есть “K”.

1.2. Осуществляется построение заданного ряда Фибоначчи, начиная с нулевого индекса и заканчивая индексом “K”.

1.3. На искомом отрезке $[n_{A0}, n_{B0}]$ при соблюдении условий $n_{A0} < n_{B0}$ и $|f(n_{A0})| \geq \varepsilon > |f(n_{B0})|$ (по умолчанию значения n_{A0} и n_{B0} являются целыми числами) выбираются точки с абсциссами n_{C0}^F и n_{D0}^F, исходя из неравенств $n_{A0} < n_{C0}^F < n_{D0}^F < n_{B0}$ и $|f(n_{A0})| > \left|f\left(n_{C0}^F\right)\right| > \left|f\left(n_{D0}^F\right)\right| > |f(n_{B0})|$, в соответствии с принципами последовательности Фибоначчи согласно следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
n_{C0}^F &= n_{A0} + \tfrac{F_{K-2}}{F_K}\left(n_{B0} - n_{A0}\right) = n_{B0} - \tfrac{F_{K-1}}{F_K}\left(n_{B0} - n_{A0}\right),\\
n_{D0}^F &= n_{A0} + \tfrac{F_{K-1}}{F_K}\left(n_{B0} - n_{A0}\right) = n_{B0} - \tfrac{F_{K-2}}{F_K}\left(n_{B0} - n_{A0}\right).
\end{aligned}$$

1.4. При наличии положительных дробных частей значения n_{C0}^F и n_{D0}^F округляются до ближайших больших целых чисел.

1.5. Если достигнута истинность выражения $n_{B0} - n_{A0} = 1$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_\varepsilon^F = 0$, и в качестве минимального номера n_ε^F выбирается $n_\varepsilon^F = n_{A0}$ в силу неравенства $|f(n_{A0})| \geq \varepsilon > |f(n_{B0})|$.

1.6. Если $n_{B0} - n_{A0} \neq 1$, то осуществляется переход к следующей итерации.

2. Итерация с индексом “N'' $(N \geq 1)$:

2.1. Если $\left|f\left(n^F_{C(N-1)}\right)\right| < \varepsilon$, то $n^F_{AN} = n^F_{A(N-1)}$, $n^F_{BN} = n^F_{C(N-1)}$, $n_{BN} - n_{AN} = n_{C(N-1)} - n_{A(N-1)} = \frac{F_{K-2-N}}{F_{K-N}} \left(n_{B(N-1)} - n_{A(N-1)}\right)$, и получаем отрезок $\left[n^F_{AN}, n^F_{BN}\right] = \left[n^F_{A(N-1)}, n^F_{C(N-1)}\right]$.

2.2. Если $\left|f\left(n^F_{C(N-1)}\right)\right| \geq \varepsilon$ и $\left|f\left(n^F_{D(N-1)}\right)\right| < \varepsilon$, то $n^F_{AN} = n^F_{C(N-1)}$, $n^F_{BN} = n^F_{D(N-1)}$, $n^F_{BN} - n^F_{AN} = n^F_{D(N-1)} - n^F_{C(N-1)} = \frac{F_{K-3-N}}{F_{K-N}} \left(n^F_{B(N-1)} - n^F_{A(N-1)}\right)$, и получаем отрезок $\left[n^F_{AN}, n^F_{BN}\right] = \left[n^F_{C(N-1)}, n^F_{D(N-1)}\right]$.

2.3. Если $\left|f\left(n^F_{D(N-1)}\right)\right| \geq \varepsilon$, то $n^F_{AN} = n^F_{D(N-1)}$, $n^F_{BN} = n^F_{B(N-1)}$, $n^F_{BN} - n^F_{AN} = n^F_{B(N-1)} - n^F_{D(N-1)} = \frac{F_{K-2-N}}{F_{K-N}} \left(n^F_{B(N-1)} - n^F_{A(N-1)}\right)$, и получаем отрезок $\left[n^F_{AN}, n^F_{BN}\right] = \left[n^F_{D(N-1)}, n^F_{B(N-1)}\right]$.

2.4. На отрезке $\left[n^F_{AN}, n^F_{BN}\right]$ при соблюдении условий $n^F_{AN} < n^F_{BN}$ и $\left|f\left(n^F_{AN}\right)\right| \geq \varepsilon > \left|f\left(n^F_{BN}\right)\right|$ выбираются точки с абсциссами n^F_{CN} и n^F_{DN}, исходя из неравенств $n^F_{AN} < n^F_{CN} < n^F_{DN} < n^F_{BN}$ и $\left|f\left(n^F_{AN}\right)\right| > \left|f\left(n^F_{CN}\right)\right| > \left|f\left(n^F_{DN}\right)\right| > \left|f\left(n^F_{BN}\right)\right|$, в соответствии с принципами последовательности Фибоначчи согласно следующим соотношениям:

$$n^F_{CN} = n^F_{AN} + \frac{F_{K-2-N}}{F_{K-N}} \left(n^F_{BN} - n^F_{AN}\right) = n^F_{BN} - \frac{F_{K-1-N}}{F_{K-N}} \left(n^F_{BN} - n^F_{AN}\right),$$

$$n^F_{DN} = n^F_{AN} + \frac{F_{K-1-N}}{F_{K-N}} \left(n^F_{BN} - n^F_{AN}\right) = n^F_{BN} - \frac{F_{K-2-N}}{F_{K-N}} \left(n^F_{BN} - n^F_{AN}\right).$$

2.5. При наличии положительных дробных частей значения n^F_{CN} и n^F_{DN} округляются до ближайших больших целых чисел.

2.6. Если достигнута истинность выражения $n^F_{BN} - n^F_{AN} = 1$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s^F_\varepsilon = N$, и в качестве минимального номера n^F_ε выбирается $n^F_\varepsilon = n^F_{AN}$ в силу неравенства $\left|f\left(n^F_{AN}\right)\right| \geq \varepsilon > \left|f\left(n^F_{BN}\right)\right|$.

2.7. Если $n^F_{BN} - n^F_{AN} \neq 1$, то осуществляется переход к следующей итерации.

Стоит отметить, что при достаточно большом значении начального индекса “K” соответствующие отрезки, полученные методами золотой пропорции и Фибоначчи, будут иметь незначительные отличия, что влечет за собой приблизительно равную эффективность обоих методов.

Метод дихотомии

Суть дихотомии или половинного деления состоит в следующем: если разделить отрезок C на отрезки A и B таким образом, что это будет отражать дихотомию, то C, деленное на A, будет равно C, деленному на B, то есть A равно B: $\frac{C}{A} = \frac{}{B} = 2$ или $A = B$.

Таким образом, при наличии исходного отрезка $[a_0, b_0]$ полученный в результате “N”-го деления отрезок $[a_N, b_N]$ связан с исходным соотношением $b_N - a_N = \frac{b_0 - a_0}{2^N}$.

В данной лабораторной работе метод дихотомии *(“METHOD OF DICHOTOMY”)* имеет следующую реализацию:

1. Итерация с индексом “0”:

1. 1. Осуществляется ввод значения расстояния, откладываемого симметрично относительно середины отрезка, для установки точек, то есть n_M^D.

1.2. Если $n_{B0} - n_{A0} \leq 2$, то на искомом отрезке $[n_{A0}, n_{B0}]$ при соблюдении условий $n_{A0} < n_{B0}$ и $|f(n_{A0})| \geq \varepsilon > |f(n_{B0})|$ (по умолчанию значения n_{A0} и n_{B0} являются целыми числами) выбирается точка с абсциссой $n_{C0}^D = n_{D0}^D$, исходя из неравенств $n_{A0} < n_{C0}^D = n_{D0}^D < n_{B0}$ и $|f(n_{A0})| > \left|f\left(n_{C0}^D\right)\right| = \left|f\left(n_{D0}^D\right)\right| > |f(n_{B0})|$, в соответствии с принципами дихотомии согласно следующему соотношению:

$$n_{C0}^D = n_{D0}^D = n_{A0} + \frac{n_{B0} - n_{A0}}{2} = n_{B0} - \frac{n_{B0} - n_{A0}}{2}.$$

1.3. Если $2 < n_{B0}^D - n_{A0}^D \leq 2n_M^D$, то на искомом отрезке $[n_{A0}, n_{B0}]$ при соблюдении условий $n_{A0} < n_{B0}$ и $|f(n_{A0})| \geq \varepsilon > |f(n_{B0})|$ (по умолчанию значения n_{A0} и n_{B0} являются целыми числами) выбираются точки с абсциссами n_{C0}^D и n_{D0}^D, исходя из неравенств $n_{A0} < n_{C0}^D < n_{D0}^D < n_{B0}$ и $|f(n_{A0})| > \left|f\left(n_{C0}^D\right)\right| > \left|f\left(n_{D0}^D\right)\right| > |f(n_{B0})|$, в соответствии с принципами дихотомии согласно следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} n_{C0}^D &= n_{A0} + \tfrac{n_{B0} - n_{A0}}{2} - 1 = n_{B0} - \tfrac{n_{B0} - n_{A0}}{2} - 1, \\ n_{D0}^D &= n_{A0} + \tfrac{n_{B0} - n_{A0}}{2} + 1 = n_{B0} - \tfrac{n_{B0} - n_{A0}}{2} + 1. \end{aligned}$$

1.4. Если $n_{B0} - n_{A0} > 2n_M^D$, то на искомом отрезке $[n_{A0}, n_{B0}]$ при соблюдении условий $n_{A0} < n_{B0}$ и $|f(n_{A0})| \geq \varepsilon > |f(n_{B0})|$ (по умолчанию значения n_{A0} и n_{B0} являются целыми числами) выбираются точки с абсциссами n_{C0}^D и n_{D0}^D, исходя из неравенств $n_{A0} < n_{C0}^D < n_{D0}^D < n_{B0}$

и $|f(n_{A0})| > \left|f\left(n^D_{C0}\right)\right| > \left|f\left(n^D_{D0}\right)\right| > |f(n_{B0})|$, в соответствии с принципами дихотомии согласно следующим соотношениям:

$$n^D_{C0} = n_{A0} + \frac{n_{B0} - n_{A0}}{2} - n^D_M = n_{B0} - \frac{n_{B0} - n_{A0}}{2} - n^D_M,$$

$$n^D_{D0} = n_{A0} + \frac{n_{B0} - n_{A0}}{2} + n^D_M = n_{B0} - \frac{n_{B0} - n_{A0}}{2} + n^D_M.$$

1.5. При наличии положительных дробных частей значения n^D_{C0} и n^D_{D0} округляются до ближайших больших целых чисел.

1.6. Если достигнута истинность выражения $n_{B0} - n_{A0} = 1$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s^D_\varepsilon = 0$, и в качестве минимального номера n^D_ε выбирается $n^D_\varepsilon = n_{A0}$ в силу неравенства $|f(n_{A0})| \geq \varepsilon > |f(n_{B0})|$.

1.7. Если $n_{B0} - n_{A0} \neq 1$, то осуществляется переход к следующей итерации.

2. Итерация с индексом “N” ($N \geq 1$):

2.1. Если $\left|f\left(n^D_{C(N-1)}\right)\right| < \varepsilon$, то $n^D_{AN} = n^D_{A(N-1)}$, $n^D_B = n^D_{C(N-1)}$, $n^D_{BN} - n^D_{AN} = n^D_{C(N-1)} - n^D_{A(N-1)} = \frac{n^D_{B(N-1)} - n^D_{A(N-1)}}{2} - n^D_M$, и получаем отрезок $\left[n^D_{AN}, n^D_{BN}\right] = \left[n^D_{A(N-1)}, n^D_{C(N-1)}\right]$.

2.2. Если $\left|f\left(n^D_{C(N-1)}\right)\right| \geq \varepsilon$ и $\left|f\left(n^D_{D(N-1)}\right)\right| < \varepsilon$, то $n^D_{AN} = n^D_{C(N-1)}$, $n^D_{B1} = n^D_{D(N-1)}$, $n^D_{BN} - n^D_{AN} = n^D_{D(N-1)} - n^D_{C(N-1)} = 2n^D_M$, и получаем отрезок $\left[n^D_{AN}, n^D_{BN}\right] = \left[n^D_{C(N-1)}, n^D_{D(N-1)}\right]$.

2.3. Если $\left|f\left(n^D_{D(N-1)}\right)\right| \geq \varepsilon$, то $n^D_{AN} = n^D_{D(N-1)}$, $n^D_{B1} = n^D_{B0}$, $n^D_{BN} - n^D_{AN} = n^D_{B(N-1)} - n^D_{D(N-1)} = \frac{n^D_{B(N-1)} - n^D_{A(N-1)}}{2} - n^D_M$, и получаем отрезок $\left[n^D_{AN}, n^D_{BN}\right] = \left[n^D_{D(N-1)}, n^D_{B(N-1)}\right]$.

2.4. Если $n^D_{BN} - n^D_{AN} \leq 2$, то на отрезке $\left[n^D_{AN}, n^D_{BN}\right]$ при соблюдении условий $n^D_{AN} < n^D_{BN}$ и $\left|f\left(n^D_{AN}\right)\right| \geq \varepsilon > \left|f\left(n^D_{BN}\right)\right|$ выбирается точка с абсциссой $n^D_{CN} = n^D_{DN}$, исходя из неравенств $n^D_{AN} < n^D_{CN} = n^D_{DN} < n^D_{BN}$ и $\left|f\left(n^D_{AN}\right)\right| > \left|f\left(n^D_{CN}\right)\right| = \left|f\left(n^D_{DN}\right)\right| > \left|f\left(n^D_{BN}\right)\right|$, в соответствии с принципами дихотомии согласно следующему соотношению:

$$n^D_{CN} = n^D_{DN} = n^D_{AN} + \frac{n^D_{BN} - n^D_{AN}}{2} = n^D_{BN} - \frac{n^D_{BN} - n^D_{AN}}{2}.$$

2.5. Если $2 < n^D_{BN} - n^D_{AN} \leq 2n^D_M$, то на отрезке $\left[n^D_{AN}, n^D_{BN}\right]$ при соблюдении условий $n^D_{AN} < n^D_{BN}$ и $\left|f\left(n^D_{AN}\right)\right| \geq \varepsilon > \left|f\left(n^D_{BN}\right)\right|$ выбираются точки с абсциссами n^D_{CN} и n^D_{DN}, исходя из неравенств $n^D_{AN} < n^D_{CN} <$

$n^D_{DN} < n^D_{BN}$ и $\left|f\left(n^D_{AN}\right)\right| > \left|f\left(n^D_{CN}\right)\right| > \left|f\left(n^D_{DN}\right)\right| > \left|f\left(n^D_{BN}\right)\right|$, в соответствии с принципами дихотомии согласно следующим соотношениям:

$$n^D_{CN} = n^D_{AN} + \tfrac{n^D_{BN}-n^D_{AN}}{2} - 1 = n^D_{BN} - \tfrac{n^D_{BN}-n^D_{AN}}{2} - 1,$$
$$n^D_{DN} = n^D_{AN} + \tfrac{n^D_{BN}-n^D_{AN}}{2} + 1 = n^D_{BN} - \tfrac{n^D_{BN}-n^D_{AN}}{2} + 1.$$

2.6. Если $n^D_{BN} - n^D_{AN} > 2n^D_M$, то на отрезке $\left[n^D_{AN}, n^D_{BN}\right]$ при соблюдении условий $n^D_{AN} < n^D_{BN}$ и $\left|f\left(n^D_{AN}\right)\right| \geq \varepsilon > \left|f\left(n^D_{BN}\right)\right|$ выбираются точки с абсциссами n^D_{CN} и n^D_{DN}, исходя из неравенств $n^D_{AN} < n^D_{CN} < n^D_{DN} < n^D_{BN}$ и $\left|f\left(n^D_{AN}\right)\right| > \left|f\left(n^D_{CN}\right)\right| > \left|f\left(n^D_{DN}\right)\right| > \left|f\left(n^D_{BN}\right)\right|$, в соответствии с принципами дихотомии согласно следующим соотношениям:

$$n^D_{CN} = n^D_{AN} + \tfrac{n^D_{BN}-n^D_{AN}}{2} - n^D_M = n^D_{BN} - \tfrac{n^D_{BN}-n^D_{AN}}{2} - n^D_M,$$
$$n^D_{DN} = n^D_{AN} + \tfrac{n^D_{BN}-n^D_{AN}}{2} + n^D_M = n^D_{BN} - \tfrac{n^D_{BN}-n^D_{AN}}{2} + n^D_M.$$

2.7. При наличии положительных дробных частей значения n^D_{CN} и n^D_{DN} округляются до ближайших больших целых чисел.

2.8. Если достигнута истинность выражения $n^D_{BN} - n^D_{AN} = 1$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s^D_\varepsilon = N$, и в качестве минимального номера n^D_ε выбирается $n^D_\varepsilon = n^D_{AN}$ в силу неравенства $\left|f\left(n^D_{AN}\right)\right| \geq \varepsilon > \left|f\left(n^D_{BN}\right)\right|$.

2.9. Если $n^D_{BN} - n^D_{AN} \neq 1$, то осуществляется переход к следующей итерации.

Описание этапов проведения лабораторной работы

Лабораторная работа по расчету значений минимальных номеров приближения к пределу числовых последовательностей вида $x_n = \frac{a_2n^2+a_1n+a_0}{b_2n^2+b_1n+b_0}$ (для $\varepsilon > 0$, $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $\left|x_n - \frac{a_2}{b_2}\right| < \varepsilon$) на основе расчетов значений минимальных номеров n_ε с использованием методов золотой пропорции, Фибоначчи, дихотомии для различных условий варьирования значений исходных данных с последующим проведением необходимых сравнительных анализов вычислительных процедур с применением представленной в графическом калькуляторе программы *“MINNESQS”* может быть разделена на три этапа.

I этап. “Приближенные вычисления значений минимальных номеров n_ε числовых последовательностей вида $x_n = \frac{a_2n^2+a_1n+a_0}{b_2n^2+b_1n+b_0}$ (для $\varepsilon > 0$, $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $\left|x_n - \frac{a_2}{b_2}\right| < \varepsilon$) *с помощью стандартных встроенных функций графического калькулятора”.*

На данном этапе преподаватель разделяет исходную группу студентов на определенное количество малых групп по 3–4 студента, что позволяет выявить различные личностные психологические особенности студентов. Каждой из групп предлагаются различные исходные данные a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 и ε.

Вычисления значений минимальных номеров n_ε заданных числовых последовательностей может осуществляться с помощью стандартных встроенных функций калькулятора следующими методами:

– *аналитическим* – выполнение вычислений с использованием стандартных функций в режиме выполнения арифметических и матричных расчетов “*RUN.MATrix*” или в режиме выполнения статистических расчетов “*STATistics*”;

– *графическим* – выполнение функционального анализа с использованием стандартных функций в режиме построения и анализа статических графиков *“GraPH-TaBLe”*.

II этап. “Приближенные вычисления значений минимальных номеров n_ε *числовых последовательностей вида* $x_n = \frac{a_2n^2+a_1n+a_0}{b_2n^2+b_1n+b_0}$ (для $\varepsilon > 0$, $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $\left|x_n - \frac{a_2}{b_2}\right| < \varepsilon$) *с использованием методов золотой пропорции, Фибоначчи, дихотомии в зависимости от различных значений* $\varepsilon > 0$ *с применением представленной в графическом калькуляторе программы “MINNESQS””.*

На данном этапе преподаватель для каждой из малых групп студентов, сформированных на первом этапе, предлагает различные исходные данные a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, а также несколько значений ε в рамках одной малой группы.

Предполагается, что студенты предварительно самостоятельно проведут анализ функции $|f(n)|$ на предмет выявления действительных точек разрыва, экстремума и угловой точки, а также по найденным значениям n_{A0} и n_{B0} реализуют итерации с индексами “0”, “1” и “2” согласно методам золотой пропорции, Фибоначчи и дихотомии.

После этого студенты проведут соответствующие необходимые расчеты с применением реализованной в графическом калькуляторе программы *“MINNESQS”*.

III этап. “Сравнительный анализ методов золотой пропорции, Фибоначчи, дихотомии в результате реализации приближенных вычислений значений минимальных номеров n_ε *числовых последовательностей вида* $x_n = \frac{a_2n^2+a_1n+a_0}{b_2n^2+b_1n+b_0}$ (для $\varepsilon > 0$, $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $\left|x_n - \frac{a_2}{b_2}\right| < \varepsilon$) *в зависимости от различных значений* ε*”.*

На данном финальном этапе преподаватель для каждой из малых групп, сформированных на первом этапе, предлагает провести сравнительный анализ проведенных на втором этапе приближенных вычислений значений минимальных номеров n_ε заданных числовых последовательностей вида $x_n = \frac{a_2n^2+a_1n+a_0}{b_2n^2+b_1n+b_0}$ (для $\varepsilon > 0$, $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $\left|x_n - \frac{a_2}{b_2}\right| < \varepsilon$) в зависимости от различных значений ε.

Для этого согласно результатам расчетов необходимо заполнить совокупную таблицу 10 полученных значений количества шагов s_ε и минимальных номеров n_ε в зависимости, во-первых, от численного метода вычислений, во-вторых, от значений ε, на основе которой формируются итоговые выводы по работе, заполняется отчет с последующей сдачей преподавателю и предлагается ответить на вопросы проверочного тестирования.

Таблица 10

Совокупная таблица по лабораторной работе № 1

3.2.2. Лабораторная работа № 2

Название работы с указанием имени программы и соответствующего раздела высшей математики: приближенные решения алгебраических и трансцендентных уравнений с использованием метода дихотомии (бисекции), комбинированного метода хорд и касательных (Ньютона), метода итераций и их сравнительный анализ (программа *“APROXEQU”*, раздел *“Дифференциальное исчисление”*).

Цель работы: осуществить нахождение приближенных решений алгебраических и трансцендентных уравнений с использованием метода дихотомии (бисекции), комбинированного метода хорд и касательных (Ньютона), метода итераций для различных условий варьирования значений исходных данных с последующим проведением необходимых сравнительных анализов вычислительных процедур с применением представленной в графическом калькуляторе программы *“APROXEQU”*.

Теоретический аспект

В силу сложности структуры символьной записи алгебраических и трансцендентных уравнений задача по нахождению точных решений является весьма трудоемкой и подчас не реальной.

Процедура нахождения приближенных решений алгебраических и трансцендентных уравнений может быть реализована в два этапа:

1. *Локализация корней* – выделение отрезков, каждый из которых содержит по одному корню, с использованием аналитических или графических методов.

2. *Уточнение корней* – вычисление приближенных значений действительных корней уравнения на каждом из отрезков с необходимой точностью, при этом каждый из корней в силу единственности на рассматриваемом интервале, называемом интервалом изоляции корня, является изолированным, с использованием численных методов.

Предлагаемые в рамках данной лабораторной работы численные методы используются для приближенных решений алгебраических и трансцендентных уравнений вида $f(x_n) = 0$ с целью определения приближенного значения изолированного действительного корня x_n на отрезке $[a_0, b_0]$ с необходимой точностью ε.

Рассмотрим логические основы реализации метода дихотомии (бисекции), комбинированного метода хорд и касательных (Ньютона), метода итераций для выполнения приближенных решений алгебраических и трансцендентных уравнений в зависимости от различных значений a_0, b_0, ε, заложенных в программу *“APROXEQU”*.

Метод дихотомии (бисекции)

Суть дихотомии (бисекции) или половинного деления состоит в следующем: если разделить отрезок C на отрезки A и B таким образом, что это будет отражать дихотомию, то C, деленное на A, будет равно C, деленному на B, то есть A равно B: $\frac{C}{A} = \frac{}{B} = 2$ или $A = B$.

Таким образом, при наличии исходного отрезка $[a_0, b_0]$ полученный в результате “N”-го деления отрезок $[a_N, b_N]$ связан с исходным соотношением $b_N - a_N = \frac{b_0 - a_0}{2^N}$.

В данной лабораторной работе метод дихотомии (бисекции) (*“METHOD OF DICHOTOMY”*) имеет следующую реализацию:

1. Итерация с индексом “0”:

1.1. На искомом отрезке $\left[a_0^D, b_0^D\right]$ при соблюдении условий $a_0^D < b_0^D$ и $f\left(a_0^D\right) \cdot f\left(b_0^D\right) < 0$ выбирается точка x_0^D, исходя из неравенства $a_0^D < x_0^D < b_0^D$, в соответствии с принципами дихотомии согласно следующему соотношению: $x_0^D = \frac{a_0^D + b_0^D}{2}$.

1.2. Если достигнута истинность выражения $\left|b_0^D - a_0^D\right| \leq 2\varepsilon$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_\varepsilon^D = 0$, и в качестве приближенного значения действительного корня уравнения x_ε^D выбирается $x_\varepsilon^D = x_0^D$ в силу равенства $x_0^D = \frac{a_0^D + b_0^D}{2}$.

1.3. Если $\left|b_0^D - a_0^D\right| > 2\varepsilon$, то осуществляется переход к следующей итерации.

2. Итерация с индексом “N” ($N \geq 1$):

2.1. Если $f\left(x_{N-1}^D\right) \cdot f\left(a_{N-1}^D\right) < 0$ и $f\left(x_{N-1}^D\right) \cdot f\left(b_{N-1}^D\right) > 0$, то $a_N^D = a_{N-1}^D$, $b_N^D = x_{N-1}^D$, $b_N^D - a_N^D = x_{N-1}^D - a_{N-1}^D = \frac{b_{N-1}^D - a_{N-1}^D}{2}$, и получаем отрезок $\left[a_N^D, b_N^D\right] = \left[a_{N-1}^D, x_{N-1}^D\right]$.

2.2. Если $f\left(x_{N-1}^D\right) \cdot f\left(a_{N-1}^D\right) > 0$ и $f\left(x_{N-1}^D\right) \cdot f\left(b_{N-1}^D\right) < 0$, то $a_N^D = x_{N-1}^D$, $b_N^D = b_{N-1}^D$, $b_N^D - a_N^D = b_{N-1}^D - x_{N-1}^D = \frac{b_{N-1}^D - a_{N-1}^D}{2}$, и получаем отрезок $\left[a_N^D, b_N^D\right] = \left[x_{N-1}^D, b_{N-1}^D\right]$.

2.3. На отрезке $\left[a_N^D, b_N^D\right]$ при соблюдении условий $a_N^D < b_N^D$ и $f\left(a_N^D\right) \cdot f\left(b_N^D\right) < 0$ выбирается точка x_N^D, исходя из неравенства $a_N^D < x_N^D < b_N^D$, в соответствии с принципами дихотомии согласно следующему соотношению: $x_N^D = \frac{a_N^D + b_N^D}{2}$.

2.4. Если достигнута истинность выражения $\left|b_N^D - a_N^D\right| \leq 2\varepsilon$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_\varepsilon^D = N$, и в качестве приближенного значения действительного корня уравнения x_ε^D выбирается $x_\varepsilon^D = x_N^D$ в силу равенства $x_N^D = \frac{a_N^D + b_N^D}{2}$.

2.5. Если $\left|b_N^D - a_N^D\right| > 2\varepsilon$, то осуществляется переход к следующей итерации.

Комбинированный метод хорд и касательных (Ньютона)

Комбинированный метод хорд и касательных (Ньютона) применяется только в случаях, когда функция $f(x)$ на искомом отрезке $[a_0, b_0]$ монотонна и не имеет точек перегиба, то есть $f'(x)$ и $f''(x)$ не изменяют знака на отрезке $[a_0, b_0]$.

Суть метода заключается в сжатии искомого отрезка $[a_0, b_0]$ в силу проведения из противоположных концов хорды и касательной согласно следующим правилам:

1. Для случая $f\left(a_0\right)\cdot f''\left(a_0\right)>0$ и $f\left(b_0\right)\cdot f''\left(b_0\right)<0$ отрезок $\left[a_N,b_N\right]$ образуется из отрезка $\left[a_{N-1},b_{N-1}\right]$ согласно следующим правилам:

1.1.Исходя из уравнения касательной, проходящей из точки с координатами $\left(a_{N-1},f\left(a_{N-1}\right)\right)$ к графику исходной функции $f\left(x\right)$, то есть $f_1\left(a_N\right)=f(a_{N-1})+f'(a_{N-1})\cdot(a_N-a_{N-1})$, получим абсциссу точки пересечения касательной с осью абсцисс ($f_1\left(a_N\right)=0$): $a_N=a_{N-1}-\frac{f\left(a_{N-1}\right)}{f'\left(a_{N-1}\right)}$.

1.2. Исходя из уравнения хорды, проходящей через точки с координатами $\left(a_{N-1},f\left(a_{N-1}\right)\right)$ и $\left(b_{N-1},f\left(b_{N-1}\right)\right)$, то есть $f_2\left(b_N\right)=f\left(b_{N-1}\right)+\left(b_N-b_{N-1}\right)\cdot\frac{f\left(a_{N-1}\right)-f\left(b_{N-1}\right)}{a_{N-1}-b_{N-1}}$, получим абсциссу точки пересечения хорды с осью абсцисс ($f_2\left(b_N\right)=0$): $b_N=b_{N-1}-f(b_{N-1})\cdot\frac{a_{N-1}-b_{N-1}}{f(a_{N-1})-f(b_{N-1})}$.

2. Для случая $f\left(a_0\right)\cdot f''\left(a_0\right)<0$ и $f\left(b_0\right)\cdot f''\left(b_0\right)>0$ отрезок $\left[a_N,b_N\right]$ образуется из отрезка $\left[a_{N-1},b_{N-1}\right]$ согласно следующим правилам:

2.1. Исходя из уравнения касательной, проходящей из точки с координатами $\left(b_{N-1},f\left(b_{N-1}\right)\right)$ к графику исходной функции $f\left(x\right)$, то есть $f_1\left(b_N\right)=f(b_{N-1})+f'(b_{N-1})\cdot(b_N-b_{N-1})$, получим абсциссу точки пересечения касательной с осью абсцисс ($f_1\left(b_N\right)=0$): $b_N=b_{N-1}-\frac{f\left(b_{N-1}\right)}{f'\left(b_{N-1}\right)}$.

2.2. Исходя из уравнения хорды, проходящей через точки с координатами $\left(a_{N-1},f\left(a_{N-1}\right)\right)$ и $\left(b_{N-1},f\left(b_{N-1}\right)\right)$, то есть $f_2\left(a_N\right)=f\left(a_{N-1}\right)+\left(a_N-a_{N-1}\right)\cdot\frac{f\left(b_{N-1}\right)-f\left(a_{N-1}\right)}{b_{N-1}-a_{N-1}}$, получим абсциссу точки пересечения хорды с осью абсцисс ($f_2\left(a_N\right)=0$): $a_N=a_{N-1}-f(a_{N-1})\cdot\frac{b_{N-1}-a_{N-1}}{f(b_{N-1})-f(a_{N-1})}$.

В данной лабораторной работе комбинированный метод хорд и касательных (*“METHOD OF CHORDS AND TANGENTS”*) или метод Ньютона имеет следующую реализацию:

1. Итерация с индексом “0”:

1.1. На искомом отрезке $\left[a_0^{CT},b_0^{CT}\right]$ при соблюдении условий $a_0^{CT}<b_0^{CT}$, $f\left(a_0^{CT}\right)\cdot f\left(b_0^{CT}\right)<0$, $f'\left(a_0^{CT}\right)\cdot f''\left(a_0^{CT}\right)>0$, $f'\left(b_0^{CT}\right)\cdot f''\left(b_0^{CT}\right)>0$ выбирается точка с координатами $\left(x_0^{CT},f\left(x_0^{CT}\right)\right)$, из которой проводится первая касательная к графику исходной функции $f\left(x\right)$.

1.2. Если $f\left(a_0^{CT}\right)\cdot f''\left(a_0^{CT}\right)>0$ и $f\left(b_0^{CT}\right)\cdot f''\left(b_0^{CT}\right)<0$, то $x_0^{CT}=a_0^{CT}$.

1.3. Если $f\left(a_0^{CT}\right)\cdot f''\left(a_0^{CT}\right)<0$ и $f\left(b_0^{CT}\right)\cdot f''\left(b_0^{CT}\right)>0$, то $x_0^{CT}=b_0^{CT}$.

1.4. Если достигнута истинность выражения $\left|b_0^{CT}-a_0^{CT}\right|\leq 2\varepsilon$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_\varepsilon^{CT}=0$, и в качестве приближенного значения действительного корня уравнения x_ε^{CT} выбирается $x_\varepsilon^{CT}=\frac{a_0^{CT}+b_0^{CT}}{2}$.

1.5. Если $\left|b_0^{CT} - a_0^{CT}\right| > 2\varepsilon$, то осуществляется переход к следующей итерации.

2. Итерация с индексом “N” ($N \geq 1$):

2.1. Если $x_0^{CT} = a_0^{CT}$, то на отрезке $\left[a_{N-1}^{CT}, b_{N-1}^{CT}\right]$ выбираются точки a_N^{CT} и b_N^{CT} с соблюдением условия $a_{N-1}^{CT} < a_N^{CT} < b_N^{CT} < b_{N-1}^{CT}$ согласно следующим соотношениям:

$$a_N^{CT} = a_{N-1}^{CT} - \frac{f\left(a_{N-1}^{CT}\right)}{f'\left(a_{N-1}^{CT}\right)} \text{ и } b_N^{CT} = b_{N-1}^{CT} - f\left(b_{N-1}^{CT}\right) \cdot \frac{a_{N-1}^{CT} - b_{N-1}^{CT}}{f\left(a_{N-1}^{CT}\right) - f\left(b_{N-1}^{CT}\right)}.$$

2.2. Если $x_0^{CT} = b_0^{CT}$, то на отрезке $\left[a_{N-1}^{CT}, b_{N-1}^{CT}\right]$ выбираются точки a_N^{CT} и b_N^{CT} с соблюдением условия $a_{N-1}^{CT} < a_N^{CT} < b_N^{CT} < b_{N-1}^{CT}$ согласно следующим соотношениям:

$$b_N^{CT} = b_{N-1}^{CT} - \frac{f\left(b_{N-1}^{CT}\right)}{f'\left(b_{N-1}^{CT}\right)} \text{ и } a_N^{CT} = a_{N-1}^{CT} - f\left(a_{N-1}^{CT}\right) \cdot \frac{b_{N-1}^{CT} - a_{N-1}^{CT}}{f\left(b_{N-1}^{CT}\right) - f\left(a_{N-1}^{CT}\right)}.$$

2.3. Если достигнута истинность выражения $\left|b_N^{CT} - a_N^{CT}\right| \leq 2\varepsilon$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_\varepsilon^{CT} = N$, и в качестве приближенного значения действительного корня уравнения x_ε^{CT} выбирается $x_\varepsilon^{CT} = \frac{a_N^{CT} + b_N^{CT}}{2}$.

2.4. Если $\left|b_\varepsilon^{CT} - a_\varepsilon^{CT}\right| > 2\varepsilon$, то осуществляется переход к следующей итерации.

Метод итераций

Метод итераций применяется к уравнению вида $x = g(x)$ на отрезке $[a_0, b_0]$ при соблюдении условий $|g'(x)| < q < 1$ и $a_0 \leq g(x) \leq b_0$, где $x \in [a_0, b_0]$.

Суть метода итераций заключается в построении рекуррентной последовательности действительных чисел, сходящихся к решению, по формуле $x_N = g(x_{N-1})$, где $x \in [a_0, b_0]$.

Обозначим дифференцируемую функцию $f(x) = x - g(x)$, при этом за начальное приближение корня примем произвольное значение $x_0 \in [a_0, b_0]$.

$$\left|f'(x)\right| = \left|x' - g'(x)\right| = \left|1 - g'(x)\right| \geq 1 - \left|g'(x)\right| \geq 1 - q.$$

Если $\bar{x}$ – точное решение уравнения $f(\bar{x}) = 0$, то имеем:

$$|x_{N+1} - x_N| = |g(x_N) - x_N| = |-f(x_N)| = |f(\bar{x}) - f(x_N)|.$$

По теореме Лагранжа $\left|f'\left(\widehat{x}\right)\right| = \frac{|f(\bar{x}) - f(x_N)|}{|\bar{x} - x_N|}$, где $\widehat{x} \in [\bar{x}, x_N]$.

Тогда $|x_{N+1} - x_N| = \left|f'\left(\widehat{x}\right)\right| \cdot |\bar{x} - x_N| \geq (1 - q) \cdot |\bar{x} - x_N|$.

С другой стороны, так как $x_{N+1} = g(x_N)$, $x_N = g(x_{N-1})$, $x_{N-1} = g(x_{N-2})$, то получим: $|x_{N+1} - x_N| = |g(x_N) - g(x_{N-1})|$.

По теореме Лагранжа $\left|g'\left(\overset{\smile}{x}\right)\right| = \frac{\left|g(x_N) - g\left(x_{N-1}\right)\right|}{\left|x_N - x_{N-1}\right|}$, где $\overset{\smile}{x} \in [x_{N-1}, x_N]$.

Тогда $|x_{N+1} - x_N| = \left|g'\left(\overset{\smile}{x}\right)\right| \cdot |x_N - x_{N-1}| \leq q \cdot |x_N - x_{N-1}|$.

Очевидно, что $|x_{N+1} - x_N| \leq q \cdot |x_N - x_{N-1}| \leq q^2 \cdot |x_{N-1} - x_{N-2}| \leq q^N \cdot |x_1 - x_0|$.

Каждый из членов ряда $x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + ... + (x_N - x_{N-1}) + ...$, как следует из неравенства, не превосходит q, а поскольку знаменатель геометрической прогрессии $q < 1$, то в силу сходимости данной геометрической прогрессии рассматриваемый ряд сходится к необходимому решению.

Так как $|x_{N+1} - x_N| \geq (1 - q) \cdot |\bar{x} - x_N|$ и $|x_{N+1} - x_N| \leq q \cdot |x_N - x_{N-1}|$, а также согласно неравенству $\varepsilon < |\bar{x} - x_N|$, получим, что $(1 - q) \cdot |\bar{x} - x_N| \leq q \cdot |x_N - x_{N-1}|$ или $|x_N - x_{N-1}| \geq \frac{1-q}{q} \cdot |\bar{x} - x_N|$, то есть $|x_N - x_{N-1}| > \frac{1-q}{q} \cdot \varepsilon$.

В данной лабораторной работе метод итераций (*“METHOD OF ITERATIONS”*) имеет следующую реализацию:

1. Итерация с индексом “0”:

1.1. На искомом отрезке $\left[a_0^I, b_0^I\right]$ при соблюдении условий $a_0^I < b_0^I$ и $f\left(a_0^I\right) \cdot f\left(b_0^I\right) < 0$ осуществляется ввод в символьном виде уравнения функции $y = g(x)$, исходя из уравнения $x = g(x)$ и неравенства $a_0^I \leq g(x_N^I) \leq b_0^I$.

1.2. Осуществляется ввод значения знаменателя геометрической прогрессии q, исходя из условия $\left|g'(x_N^I)\right| < q < 1$.

1.3. На искомом отрезке $\left[a_0^I, b_0^I\right]$ при соблюдении условий $a_0^I < b_0^I$ и $f\left(a_0^I\right) \cdot f\left(b_0^I\right) < 0$ выбирается абсцисса точки начального приближения с координатами $\left(x_0^I, f\left(x_0^I\right)\right)$, исходя из неравенства $a_0^I < x_0^I < b_0^I$.

2. Итерация с индексом “N'' $(N \geq 1)$:

2.1. Устанавливается значение абсциссы точки с координатами $\left(x_N^I, f\left(x_N^I\right)\right)$ при соблюдении условия $a_0^I < x_N^I < b_0^I$, исходя из соотношения $x_N^I = g(x_{N-1}^I)$.

2.2. Если достигнута истинность выражения $\left|x_N^I - x_{N-1}^I\right| \leq \frac{1-q}{q} \cdot \varepsilon$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_\varepsilon^I = N$, и в качестве приближенного значения действительного корня уравнения x_ε^I выбирается значение $x_\varepsilon^I = x_N^I$.

2.3. Если $\left|x_N^I - x_{N-1}^I\right| > \frac{1-q}{q}\varepsilon$, то осуществляется переход к следующей итерации.

Описание этапов проведения лабораторной работы

Лабораторная работа по нахождению приближенных решений алгебраических и трансцендентных уравнений с использованием метода дихотомии (бисекции), комбинированного метода хорд и касательных (Ньютона), метода итераций для различных условий варьирования значений исходных данных с последующим проведением необходимых сравнительных анализов вычислительных процедур с применением представленной в графическом калькуляторе программы *“APROXEQU”* может быть разделена на три этапа.

I этап. “Приближенные решения алгебраических и трансцендентных уравнений с помощью стандартных встроенных функций графического калькулятора”.

На данном этапе преподаватель разделяет исходную группу студентов на определенное количество малых групп по 3-4 студента, что позволяет выявить различные личностные психологические особенности студентов, каждой из которых предлагаются различные исходные данные символьной записи самого уравнения $f(x) = 0$, а также значений a_0, b_0 и ε.

Нахождение приближенных решений алгебраических и трансцендентных уравнений может осуществляться с помощью стандартных встроенных функций калькулятора следующими методами:

– *аналитическим* – выполнение вычислений с использованием стандартных функций в режиме выполнения арифметических и матричных расчетов “*RUN.MATrix*”;

– *графическим* – выполнение функционального анализа с использованием стандартных функций в режиме построения и анализа статических графиков *“GraPH-TaBLe”*.

II этап. “Приближенные решения алгебраических и трансцендентных уравнений с использованием метода дихотомии (бисекции), комбинированного метода хорд и касательных (Ньютона), метода итераций в зависимости от различных значений $\varepsilon > 0$ *с применением представленной в графическом калькуляторе программы “APROXEQU”.*

На данном этапе преподаватель для каждой из малых групп студентов, сформированных на первом этапе, предлагает различные исходные данные символьной записи самого уравнения $f\left(x\right) = 0$, значений a_0, b_0, а также несколько значений ε в рамках одной малой группы.

Предполагается, что студенты предварительно самостоятельно проведут анализ функции $f\left(x\right)$ на предмет выявления количества действительных изолированных корней уравнения $f\left(x\right) = 0$ и определения интервалов изоляции для данных действительных корней, а также по предлагаемым значениям концов одного из интервалов изоляции a_0 и b_0 реализуют итерации с индексами “$0''$”, “$1''$” и “$2''$” согласно методу дихотомии (бисекции), комбинированному методу хорд и касательных (Ньютона) и методу итераций.

После этого студенты проведут соответствующие необходимые расчеты с применением реализованной в графическом калькуляторе программы *“APROXEQU”*.

III этап. “Сравнительный анализ методов дихотомии (бисекции), комбинированного метода хорд и касательных (Ньютона), метода итераций в результате реализации приближенных решений алгебраических и трансцендентных уравнений в зависимости от различных значений ε*”.*

На данном финальном этапе преподаватель для каждой из малых групп, сформированных на первом этапе, предлагает провести сравнительный анализ реализованных на втором этапе приближенных решений алгебраических и трансцендентных уравнений в зависимости от различных значений ε.

Для этого согласно результатам расчетов необходимо заполнить совокупную таблицу 11 полученных значений в зависимости, во-первых, от численного метода вычислений, а во-вторых, от значений ε, на основе которой формируются итоговые выводы по работе, заполняется отчет с последующей сдачей преподавателю и предлагается ответить на вопросы проверочного тестирования.

Таблица 11

Совокупная таблица по лабораторной работе № 2

3.2.3. Лабораторная работа № 3

Название работы с указанием имени программы и соответствующего раздела высшей математики: приближенные вычисления значений определенных интегралов по формулам средних прямоугольников, трапеций, параболических трапеций (Симпсона) и их сравнительный анализ (программа *“APROXINT”*, раздел *“Интегральное исчисление”*).

Цель работы: осуществить приближенные вычисления значений определенных интегралов по формулам средних прямоугольников, трапеций, параболических трапеций (формула Симпсона) для различных условий варьирования значений исходных данных с последующим проведением необходимых сравнительных анализов вычислительных процедур с применением представленной в графическом калькуляторе программы *“APROXINT”*.

Теоретический аспект

При вычислениях значений определенных интегралов нередко встречаются следующие проблемы:

1. Невозможность или сложность выражения подынтегральной функции через элементарные функции.

2. Аналитическое задание подынтегральной функции в виде таблицы значений функции в зависимости от аргумента.

3. Графическое задание подынтегральной функции с использованием соответствующего графика значений функции в зависимости от аргумента.

В подобных ситуациях для вычисления приближенных значений определенных интегралов используются численные методы.

Согласно методу механических квадратур, подынтегральную функцию $y = f\,(x)$ можно заменить интерполяционным многочленом степени “S” в силу приближенных вычислений значений функции $y = f\,(x)$:

$$P_S\,(x) = a_S x^S + a_{S-1} x^{S-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$
$$\text{причем} \quad P_S\,(x_i) = y_i, \quad \text{где} \quad i = 0, 1, ..., N.$$

Геометрическая интерпретация метода заключается в том, что график исходной функции $y = f\,(x)$ заменяется “параболой степени “S”” $y = f\,(x) = P_S\,(x) = a_S x^S + a_{S-1} x^{S-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, проходящей через “$S + 1$” точек графика данной функции.

В данной лабораторной работе интерполяционный многочлен степени “S” представляется в следующем виде:

$$P_S\,(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + ... + a_S \cdot (x - x_0) \cdot ... \cdot (x - x_{n-1})\,.$$

Приближенное значение определенного интеграла от подынтегральной функции $y = f\,(x)$ на заданном отрезке $[a_0, b_0]$ равно значению определенного интеграла от интерполяционного многочлена на заданном отрезке $[a_0, b_0]$, при этом осуществляется деление данного отрезка на определенное количество равных меньших отрезков или шагов в зависимости от заданного значения количества шагов s_α или значения фиксированного шага h_α, осуществляется расчет приближенного значения определенного интеграла на каждом из полученных отрезков с последующим нахождением приближенного значения определенного интеграла на заданном отрезке $[a_0, b_0]$ как суммы найденных приближенных значений определенных интегралов на каждом из равных меньших отрезков.

Таким образом, рассматриваемые в рамках данной лабораторной работы численные методы используются для приближенных вычислений определенных интегралов от подынтегральных функций $f(x)$ на отрезке $[a_0, b_0]$ в зависимости от заданного значения количества шагов s_α или значения фиксированного шага h_α.

Рассмотрим логические основы реализации расчетов по формулам средних прямоугольников, трапеций, параболических трапеций (Симпсона) (замена подынтегральной функции интерполяционными многочленами нулевой, первой и второй степеней соответственно) для вычислений приближенных значений определенных интегралов в зависимости от различных значений a_0, b_0, s_α или h_α, заложенных в программу *“APROXINT”.*

Формула средних прямоугольников

1. *Замена подынтегральной функции интерполяционным многочленом нулевой степени на отрезке* $[x_0, x_1] = [x_0, x_0 + h_\alpha]$.

Имеем одно заданное значение подынтегральной функции $y_{1/2} = f\left(x_{1/2}\right)$ при $x = x_{1/2}$.

Тогда $P_0\left(x\right) = f\left(x_{1/2}\right) = a_0$ и $y = f\left(x\right) \approx P_0\left(x\right) = f\left(x_{1/2}\right)$.

В данном случае график подынтегральной функции $y = f\left(x\right)$ на отрезке $[x_0, x_1] = [x_0, x_0 + h_\alpha]$ заменяется горизонтальной прямой, проходящей через точку с координатами $\left(x_{1/2}, f\left(x_{1/2}\right)\right) = \left(x_0 + \frac{h_\alpha}{2}, f\left(x_0 + \frac{h_\alpha}{2}\right)\right)$.

2. *Вычисление приближенного значения определенного интеграла на отрезке* $[x_0, x_1] = [x_0, x_0 + h_\alpha]$.

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} f\left(x\right) dx = \int\limits_{x_{1/2}-\frac{h_\alpha}{2}}^{x_{1/2}+\frac{h_\alpha}{2}} f\left(x\right) dx \approx \int\limits_{x_{1/2}-\frac{h_\alpha}{2}}^{x_{1/2}+\frac{h_\alpha}{2}} P_0\left(x\right) dx = \int\limits_{x_{1/2}-\frac{h_\alpha}{2}}^{x_{1/2}+\frac{h_\alpha}{2}} f\left(x_{1/2}\right) dx =$$

$$= f\left(x_{1/2}\right) \cdot \left(x_{1/2} + \frac{h_\alpha}{2} - x_{1/2} + \frac{h_\alpha}{2}\right) = h_\alpha \cdot f\left(x_{1/2}\right).$$

Таким образом, приближенное значение определенного интеграла на отрезке $[x_0, x_1] = [x_0, x_0 + h_\alpha]$ равно площади прямоугольника со значениями стороны $f\left(x_{1/2}\right)$ и высоты h_α.

3. *Вычисление приближенного значения определенного интеграла по формуле средних прямоугольников на отрезке* $[a_0, b_0]$.

$$\begin{gathered}
\int_{x_0}^{x_1} f\left(x\right) dx \approx h_\alpha \cdot f\left(x_{1/2}\right). \\
\int_{x_0}^{x_2} f\left(x\right) dx = \int_{x_0}^{x_1} f\left(x\right) dx + \int_{x_1}^{x_2} f\left(x\right) dx \approx \\
\approx h_\alpha \cdot f\left(x_{1/2}\right) + h_\alpha \cdot f\left(x_{3/2}\right) = \\
= h_\alpha \cdot \left(f\left(x_{1/2}\right) + f\left(x_{3/2}\right)\right). \\
\int_{x_0}^{x_3} f\left(x\right) dx = \int_{x_0}^{x_1} f\left(x\right) dx + \int_{x_1}^{x_2} f\left(x\right) dx + \int_{x_2}^{x_3} f\left(x\right) dx \approx
\end{gathered}$$

$$\approx h_\alpha \cdot f\left(x_{1/2}\right) + h_\alpha \cdot f\left(x_{3/2}\right) + h_\alpha \cdot f\left(x_{5/2}\right) =$$
$$= h_\alpha \cdot \left(f\left(x_{1/2}\right) + f\left(x_{3/2}\right) + f\left(x_{5/2}\right)\right).$$

....

$$\int\limits_{x_0}^{x_N} f(x)\,dx = \sum_{J=1}^{N}\left(\int\limits_{x_{J-1}}^{x_J} f(x)\,dx\right) \approx \sum_{J=1}^{N}\left(h_\alpha \cdot f\left(x_{(2J-1)/2}\right)\right).$$

Тогда приближенное значение определенного интеграла на отрезке $[a_0, b_0]$ определяется согласно следующему соотношению:

$$\int\limits_{a_0}^{b_0} f(x)\,dx = \int\limits_{x_0}^{x_S} f(x)\,dx = \sum_{J=1}^{S}\left(\int\limits_{x_{J-1}}^{x_J} f(x)\,dx\right) \approx \sum_{J=1}^{S}\left(h_\alpha \cdot f\left(x_{(2J-1)/2}\right)\right).$$

В данной лабораторной работе использование формулы средних прямоугольников (*“FORMULA OF MIDDLE RECTANGLES”*) имеет следующую реализацию:

1. Итерация с индексом “N” ($N \geq 1$):

1.1. На отрезке $[a_0, b_0]$ при соблюдении условия $a_0 < b_0$, исходя из вводимого или рассчитанного значения фиксированного шага h_α^{MR} (при вводимом значении количества шагов s_α^{MR} по формуле $h_\alpha^{MR} = \frac{b_0 - a_0}{s_\alpha^{MR}}$) выбирается абсцисса точки подынтегральной функции с координатами $\left(x_N^{MR}, f\left(x_N^{MR}\right)\right)$, то есть x_N^{MR} согласно следующему соотношению: $x_N^{MR} = x_{N-1}^{MR} + h_\alpha^{MR}$.

1.2. Осуществляется вычисление площади элементарного прямоугольника q_N^{MR}, значение высоты которого $h_\alpha^{MR} = x_N^{MR} - x_{N-1}^{MR} = x_1^{MR} - x_0^{MR}$, согласно следующему соотношению: $q_N^{MR} = h_\alpha^{MR} \cdot f\left(x_{(2N-1)/2}^{MR}\right)$.

1.3. Осуществляется вычисление приближенного значения определенного интеграла на отрезке $\left[a_0, x_N^{MR}\right]$ согласно следующему соотношению: $I_{\alpha N}^{MR} = I_{\alpha(N-1)}^{MR} + q_N^{MR}$.

1.4. Если достигнута истинность выражения $x_N^{MR} \geq b_0$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_\alpha^{MR} = N$, и приближенное значение определенного интеграла $I_\alpha^{MR} = I_{\alpha N}^{MR}$.

1.5. Если $x_N^{MR} < b_0$, то осуществляется переход к следующей итерации.

Формула трапеций

1. *Замена подынтегральной функции интерполяционным многочленом первой степени на отрезке* $[x_0, x_1] = [x_0, x_0 + h_\alpha]$.

Имеем два заданных значения подынтегральной функции $y_0 = f(x_0)$ при $x = x_0$ и $y_1 = f(x_0 + h_\alpha)$ при $x = x_1 = x_0 + h_\alpha$.

Тогда $P_1(x) = f(x_1) = a_0 + a_1 \cdot (x_1 - x_0) = f(x_0) + a_1 \cdot h_\alpha \Rightarrow a_1 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{h_\alpha}$ и $y = f(x) \approx P_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{h_\alpha} \cdot (x - x_0)$.

В данном случае график подынтегральной функции $y = f(x)$ на отрезке $[x_0, x_1] = [x_0, x_0+h_\alpha]$ заменяется наклонной прямой, проходящей через точки $\left(x_{1/2}, f\left(x_{1/2}\right)\right)$ и $(x_1, f(x_1)) = (x_0 + h_\alpha, f(x_0 + h_\alpha))$.

2. *Вычисление приближенного значения определенного интеграла на отрезке* $[x_0, x_1] = [x_0, x_0 + h_\alpha]$.

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \int\limits_{x_0}^{x_0+h_\alpha} f(x)\,dx \approx \int\limits_{x_0}^{x_0+h_\alpha} P_1(x)\,dx =$$
$$= \int\limits_{x_0}^{x_0+h_\alpha} \left(f(x_0) + \tfrac{f(x_1)-f(x_0)}{h_\alpha} \cdot (x - x_0)\right) dx.$$

Выполним замену переменной:

$$t = \frac{x - x_0}{h_\alpha}, \quad x = x_0 + t \cdot h_\alpha, \quad dx = h_\alpha dt.$$

$$x = x_0 \Rightarrow t = 0, \quad x = x_1 = x_0 + h_\alpha \Rightarrow t = 1.$$

Тогда

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+h_\alpha} \left(f(x_0) + \tfrac{f(x_1)-f(x_0)}{h_\alpha} \cdot (x - x_0)\right) dx =$$
$$h_\alpha \int\limits_0^1 (f(x_0) + (f(x_1) - f(x_0)) \cdot t)\,dt =$$
$$= h_\alpha \cdot \left(f(x_0) + \tfrac{f(x_1)-f(x_0)}{2}\right) = h_\alpha \cdot \tfrac{f(x_0)+f(x_1)}{2}.$$

В итоге имеем:

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \approx h_\alpha \cdot \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}.$$

Таким образом, приближенное значение определенного интеграла на отрезке $[x_0, x_1] = [x_0, x_0 + h_\alpha]$ равно площади прямоугольной трапеции со значениями оснований $f(x_0)$, $f(x_1)$ и высотой h_α.

3. *Вычисление приближенного значения определенного интеграла по формуле трапеций на отрезке* $[a_0, b_0]$.

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} f\left(x\right)dx \approx h_\alpha \cdot \tfrac{f(x_0)+f(x_1)}{2}.$$

$$\int\limits_{x_0}^{x_2} f\left(x\right)dx = \int\limits_{x_0}^{x_1} f\left(x\right)dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} f\left(x\right)dx \approx h_\alpha \cdot \tfrac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h_\alpha \cdot \tfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2} =$$

$$= h_\alpha \cdot \left(\tfrac{f(x_0)+f(x_2)}{2} + f\left(x_1\right)\right).$$

$$\int\limits_{x_0}^{x_3} f\left(x\right)dx = \int\limits_{x_0}^{x_1} f\left(x\right)dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} f\left(x\right)dx + \int\limits_{x_2}^{x_3} f\left(x\right)dx \approx$$

$$\approx h_\alpha \cdot \tfrac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h_\alpha \cdot \tfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + h_\alpha \cdot \tfrac{f(x_2)+f(x_3)}{2} =$$

$$= h_\alpha \cdot \left(\tfrac{f(x_0)+f(x_3)}{2} + f\left(x_1\right) + f\left(x_2\right)\right).$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int\limits_{x_0}^{x_N} f\left(x\right)dx = \sum_{J=1}^{N}\left(\int\limits_{x_{J-1}}^{x_J} f\left(x\right)dx\right) \approx h_\alpha \cdot \left(\tfrac{f(x_0)+f(x_N)}{2} + \sum_{J=1}^{N-1} f\left(x_J\right)\right).$$

Тогда приближенное значение определенного интеграла на отрезке $[a_0, b_0]$ определяется согласно следующему соотношению:

$$\int\limits_{a_0}^{b_0} f\left(x\right)dx = \int\limits_{x_0}^{x_S} f\left(x\right)dx = \sum_{J=1}^{S}\left(\int\limits_{x_{J-1}}^{x_J} f\left(x\right)dx\right) \approx$$

$$h_\alpha \cdot \left(\tfrac{f(x_0)+f(x_S)}{2} + \sum_{J=1}^{S-1} f\left(x_J\right)\right) = h_\alpha \cdot \left(\tfrac{f(a_0)+f(b_0)}{2} + \sum_{J=1}^{S-1} f\left(x_J\right)\right)$$

В данной лабораторной работе использование формулы трапеций (“FORMULA OF TRAPEZOIDS”) имеет следующую реализацию:

1. Итерация с индексом “N” ($N \geq 1$):

1.1. На искомом отрезке $[a_0, b_0]$ при соблюдении условия $a_0 < b_0$, исходя из вводимого или рассчитанного значения фиксированного шага h_α^T (при вводимом значении количества шагов s_α^T по формуле $h_\alpha^T = \frac{b_0 - a_0}{s_\alpha^T}$), выбирается абсцисса точки подынтегральной функции с координатами $\left(x_N^T, f\left(x_N^T\right)\right)$, то есть x_N^T согласно следующему соотношению: $x_N^T = x_{N-1}^T + h_\alpha^T$.

1.2. Осуществляется расчет площади элементарной прямоугольной трапеции q_N^T, значение высоты которой $h_\alpha^T = x_N^T - x_{N-1}^T = x_1^T - x_0^T$, согласно следующему соотношению: $q_N^T = h_\alpha^T \cdot \frac{f\left(x_{N-1}^T\right) + f\left(x_N^T\right)}{2}$.

1.3. Осуществляется расчет приближенного значения определенного интеграла на отрезке $\left[a_0, x_N^T\right]$ согласно следующему соотношению: $I_{\alpha N}^T = I_{\alpha(N-1)}^T + q_N^T$.

1.4. Если достигнута истинность выражения $x_N^T \geq b_0$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_\alpha^T = N$, и приближенное значение определенного интеграла $I_\alpha^T = I_{\alpha N}^T$.

1.5. Если $x_N^T < b_0$, то осуществляется переход к следующей итерации.

Формула параболических трапеций (Симпсона)

1. *Замена подынтегральной функции интерполяционным многочленом второй степени на отрезке* $[x_0, x_1] = [x_0, x_0 + h_\alpha]$.

Имеем три заданных значения подынтегральной функции $y_0 = f(x_0)$ при $x = x_0$, $y_{1/2} = f(x_0 + h_\alpha/2)$ при $x = x_{1/2} = x_0 + h_\alpha/2$ и $y_1 = f(x_0 + h_\alpha)$ при $x = x_1 = x_0 + h_\alpha$. Тогда

$$\begin{gathered}
P_2(x) = a_0 + a_1 \cdot (x_1 - x_0) + a_2 \cdot (x_1 - x_0) \cdot \left(x_1 - x_{1/2}\right) = \\
= f(x_0) + \tfrac{f\left(x_{1/2}\right) - f(x_0)}{(h_\alpha/2)} \cdot h_\alpha + a_2 h_\alpha \tfrac{h_\alpha}{2} = f(x_1). \\
f(x_0) + 2\left(f\left(x_{1/2}\right) - f(x_0)\right) + a_2 \tfrac{(h_\alpha)^2}{2} = f(x_1) \Rightarrow \\
a_2 = \tfrac{2\left(f(x_1) - 2f\left(x_{1/2}\right) + f(x_0)\right)}{(h_\alpha)^2}.
\end{gathered}$$

Получим, что

$$y = f(x) \approx P_2(x) = f(x_0) + \frac{2\left(f\left(x_{1/2}\right) - f(x_0)\right)}{h_\alpha} \cdot (x - x_0) +$$

$$+ \frac{2\left(f(x_1) - 2f\left(x_{1/2}\right) + f(x_0)\right)}{(h_\alpha)^2} (x - x_0) \cdot \left(x - \left(x_0 + \frac{h_\alpha}{2}\right)\right).$$

В данном случае график подынтегральной функции $y = f(x)$ на отрезке $[x_0, x_1] = [x_0, x_0 + h_\alpha]$ заменяется дугой параболы с вертикальной осью, проходящей через точки $\left(x_{1/2}, f\left(x_{1/2}\right)\right)$, $\left(x_{1/2}, f\left(x_{1/2}\right)\right) = (x_0 + h_\alpha/2, f(x_0 + h_\alpha/2))$ и $(x_1, f(x_1)) = (x_0 + h_\alpha, f(x_0 + h_\alpha))$.

2. *Вычисление приближенного значения определенного интеграла на отрезке* $[x_0, x_1] = [x_0, x_0 + h_\alpha]$.

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \int\limits_{x_0}^{x_0 + h_\alpha} f(x)\,dx \approx \int\limits_{x_0}^{x_0 + h_\alpha} P_2(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_0 + h_\alpha} \left(\begin{array}{l} f(x_0) + \frac{2\left(f\left(x_{1/2}\right) - f(x_0)\right)}{h_\alpha} \cdot (x - x_0) + \\ + \frac{2\left(f(x_1) - 2f\left(x_{1/2}\right) + f(x_0)\right)}{(h_\alpha)^2} (x - x_0) \cdot \left(x - \left(x_0 + \frac{h_\alpha}{2}\right)\right) \end{array} \right) dx.$$

Выполним замену переменной:

$$t=\tfrac{x-x_0}{h_\alpha},\quad x=x_0+t\cdot h_\alpha,\quad dx=h_\alpha dt.$$
$$x=x_0\Rightarrow t=0,\quad x=x_1=x_0+h_\alpha\Rightarrow t=1.$$

Тогда

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+h_\alpha}\left(\begin{array}{l} f\left(x_0\right)+\frac{2\left(f\left(x_{1/2}\right)-f\left(x_0\right)\right)}{h_\alpha}\cdot\left(x-x_0\right)+\\ +\frac{f\left(x_1\right)-2f\left(x_{1/2}\right)+f\left(x_0\right)}{\left(h_\alpha\right)^2}\left(x-x_0\right)\cdot\left(x-\left(x_0+\frac{h_\alpha}{2}\right)\right)\end{array}\right)dx=$$
$$=h_\alpha\cdot\int\limits_0^1\Bigl(f\left(x_0\right)+2\left(f\left(x_{1/2}\right)-f\left(x_0\right)\right)\cdot t+2\bigl(f\left(x_1\right)-2f\left(x_{1/2}\right)+$$
$$+f\left(x_0\right)\bigr)t\left(t-\tfrac{1}{2}\right)\Bigr)dt=h_\alpha\cdot\Bigl(f\left(x_0\right)+\left(f\left(x_{1/2}\right)-f\left(x_0\right)\right)+$$
$$+\frac{f\left(x_0\right)-2f\left(x_{1/2}\right)+f\left(x_1\right)}{6}\Bigr)=\tfrac{h_\alpha}{6}\cdot\left(f\left(x_0\right)+4f\left(x_{1/2}\right)+f\left(x_1\right)\right).$$

В итоге имеем:

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}f\left(x\right)dx\approx\frac{h_\alpha}{6}\cdot\left(f\left(x_0\right)+4f\left(x_{1/2}\right)+f\left(x_1\right)\right).$$

Таким образом, приближенное значение определенного интеграла на отрезке $[x_0,x_1]=[x_0,x_0+h_\alpha^{PT}]$ равно площади параболической трапеции, ограниченной осью абсцисс, линиями, параллельными осям ординат и дугой параболы с вертикальной осью, проходящей через точки $\left(x_{1/2},f\left(x_{1/2}\right)\right),\left(x_{1/2},f\left(x_{1/2}\right)\right)=(x_0+h_\alpha/2,f\left(x_0+h_\alpha/2\right))$ и $(x_1,f\left(x_1\right))=(x_0+h_\alpha,f\left(x_0+h_\alpha\right))$.

3. *Вычисление приближенного значения определенного интеграла по формуле параболических трапеций на отрезке* $[a_0,b_0]$.

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}f\left(x\right)dx\approx\frac{h_\alpha}{6}\cdot\left(f\left(x_0\right)+4f\left(x_{1/2}\right)+f\left(x_1\right)\right).$$

$$\int\limits_{x_0}^{x_2}f\left(x\right)dx=\int\limits_{x_0}^{x_1}f\left(x\right)dx+\int\limits_{x_1}^{x_2}f\left(x\right)dx\approx$$
$$\approx\frac{h_\alpha}{6}\cdot\left(f\left(x_0\right)+4f\left(x_{1/2}\right)+f\left(x_1\right)\right)+\frac{h_\alpha}{6}\cdot\left(f\left(x_1\right)+4f\left(x_{3/2}\right)+f\left(x_2\right)\right)=$$
$$=\frac{h_\alpha}{6}\cdot\left(f\left(x_0\right)+f\left(x_2\right)+4\left(f\left(x_{1/2}\right)+f\left(x_{3/2}\right)\right)+2f\left(x_1\right)\right)=$$

$$= \frac{h_\alpha}{3} \cdot \left(\frac{f(x_0) + f(x_2)}{2} + 2\left(f\left(x_{1/2}\right) + f\left(x_{3/2}\right)\right) + f(x_1) \right).$$

$$\int\limits_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \int\limits_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx \approx$$

$$\approx \frac{h_\alpha}{6} \cdot \left(f(x_0) + 4f\left(x_{1/2}\right) + f(x_1)\right) + \frac{h_\alpha}{6} \cdot \left(f(x_1) + 4f\left(x_{3/2}\right) + f(x_2)\right) +$$

$$+\frac{h_\alpha}{6} \cdot \left(f(x_2) + 4f\left(x_{5/2}\right) + f(x_3)\right) =$$

$$=\frac{h_\alpha}{6}\cdot\left(f(x_0)+f(x_3)+4\left(f\left(x_{1/2}\right)+f\left(x_{3/2}\right)+f\left(x_{5/2}\right)\right)+2\left(f(x_1)+f(x_2)\right)\right)=$$

$$=\frac{h_\alpha}{3} \cdot \left(\frac{f(x_0)+f(x_3)}{2}+2\left(f\left(x_{1/2}\right)+f\left(x_{3/2}\right)+f\left(x_{5/2}\right)\right)+f(x_1)+f(x_2) \right).$$

. . . .

$$\int\limits_{x_0}^{x_N} f(x)\,dx = \sum_{J=1}^{N} \left(\int\limits_{x_{J-1}}^{x_J} f(x)\,dx \right) \approx \frac{h_\alpha}{3} \cdot \left(\frac{f(x_0) + f(x_N)}{2} + \right.$$

$$\left. +2\sum_{J=1}^{N} f\left(x_{(2J-1)/2}\right) + \sum_{J=1}^{N-1} f(x_J) \right).$$

Тогда приближенное значение определенного интеграла на отрезке $[a_0, b_0]$ определяется согласно следующему соотношению:

$$\int\limits_{a_0}^{b_0} f(x)\,dx = \int\limits_{x_0}^{x_S} f(x)\,dx = \sum_{J=1}^{S} \left(\int\limits_{x_{J-1}}^{x_J} f(x)\,dx \right) \approx$$

$$\approx \frac{h_\alpha}{3} \cdot \left(\frac{f(x_0) + f(x_S)}{2} + 2\sum_{J=1}^{S} f\left(x_{(2J-1)/2}\right) + \sum_{J=1}^{S-1} f(x_J) \right) =$$

$$= \frac{h_\alpha}{3} \cdot \left(\frac{f(a_0) + f(b_0)}{2} + 2\sum_{J=1}^{S} f\left(x_{(2J-1)/2}\right) + \sum_{J=1}^{S-1} f(x_J) \right).$$

В данной лабораторной работе использование формулы параболических трапеций (Симпсона) (“FORMULA OF PARABOLIC TRAPEZOIDS”) имеет следующую реализацию:

1. Итерация с индексом “N” ($N \geq 1$):

1.1. На отрезке $[a_0, b_0]$ при соблюдении условия $a_0 < b_0$, исходя из вводимого или рассчитанного значения фиксированного шага h_α^{PT} (при вводимом значении количества шагов s_α^{PT} по формуле $h_\alpha^{PT} = \frac{b_0 - a_0}{s_\alpha^{PT}}$), выбирается абсцисса точки подынтегральной функции с координатами $\left(x_N^{PT}, f\left(x_N^{PT}\right)\right)$, то есть x_N^{PT} согласно следующему соотношению: $x_N^{PT} = x_{N-1}^{PT} + h_\alpha^{PT}$.

1.2. Осуществляется расчет площади элементарной параболической трапеции q_N^{PT}, значение высоты которой $h_\alpha^{PT} = x_N^{PT} - x_{N-1}^{PT} = x_1^{PT} - x_0^{PT}$, согласно следующей формуле:

$$q_N^{PT} = \frac{h_\alpha^{PT}}{6} \cdot \left(f\left(x_{N-1}^{PT}\right) + 4f\left(x_{(2N-1)/2}^{PT}\right) + f\left(x_N^{PT}\right)\right).$$

1.3. Осуществляется расчет приближенного значения определенного интеграла на отрезке $\left[a_0, x_N^{PT}\right]$ согласно следующему соотношению: $I_{\alpha N}^{PT} = I_{\alpha(N-1)}^{PT} + q_N^{PT}$.

1.4. Если достигнута истинность выражения $x_N^{PT} \geq b_0$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_\alpha^{PT} = N$, и приближенное значение определенного интеграла $I_\alpha^{PT} = I_{\alpha N}^{PT}$.

1.5. Если $x_N^{PT} < b_0$, то осуществляется переход к следующей итерации.

Описание этапов проведения лабораторной работы

Лабораторная работа по реализации приближенных вычислений значений определенных интегралов по формулам средних прямоугольников, трапеций, параболических трапеций (Симпсона) для различных условий варьирования значений исходных данных с последующим проведением необходимых сравнительных анализов вычислительных процедур с применением представленной в графическом калькуляторе программы *“APROXINT”* может быть разделена на три этапа.

I этап. “Приближенные вычисления значений определенных интегралов с помощью стандартных встроенных функций графического калькулятора”.

На данном этапе преподаватель разделяет исходную группу студентов на определенное количество малых групп по 3–4 студента, что позволяет выявить различные личностные психологические особенности студентов, каждой из которых предлагаются различные исходные данные символьной записи подынтегральной функции $y = f(x)$, значений абсцисс a_0, b_0 и количества шагов s_α или фиксированного шага h_α.

Осуществление приближенных вычислений определенных интегралов может осуществляться с помощью стандартных встроенных функций калькулятора следующими методами:

– *аналитическим* – выполнение вычислений с использованием стандартных функций в режиме выполнения арифметических и матричных расчетов “*RUN.MATrix*”;

– *графическим* – выполнение функционального анализа с использованием стандартных функций в режиме построения и анализа статических графиков *“GraPH-TaBLe”*.

II этап. “Приближенные вычисления значений определенных интегралов по формулам средних прямоугольников, трапеций, параболических трапеций (Симпсона) в зависимости от различных значений количества шагов s_α *или фиксированного шага* h_α *с применением представленной в графическом калькуляторе программы “APROXINT”.*

На данном этапе преподаватель для каждой из малых групп студентов, сформированных на первом этапе, предлагает различные исходные данные символьной записи подынтегральной функции $y = f(x)$, значений абсцисс a_0, b_0, а также несколько значений количества шагов s_α или фиксированного шага h_α в рамках одной малой группы.

Предполагается, что студенты предварительно самостоятельно могут вычислить точные значения определенного интеграла в результате исследования подынтегральной функции $f(x)$, а также по предлагаемым значениям концов одного из интервалов изоляции a_0 и b_0 реализуют итерации с индексами “1”, “2” и “3” согласно формулам средних прямоугольников, трапеций, параболических трапеций (Симпсона).

После этого студенты проведут соответствующие необходимые расчеты с применением реализованной в графическом калькуляторе программы *“APROXINT”*.

III этап. “Сравнительный анализ формул средних прямоугольников, трапеций, параболических трапеций (Симпсона) в результате реализации приближенных вычислений определенных интегралов в зависимости от различных значений количества шагов s_α *или фиксированного шага* h_α*”.*

На данном финальном этапе преподаватель для каждой из малых групп, сформированных на первом этапе, предлагает провести сравнительный анализ реализованных на втором этапе приближенных вычислений определенных интегралов в зависимости от различных значений количества шагов s_α или фиксированного шага h_α.

Для этого согласно результатам расчетов необходимо заполнить совокупную таблицу 12 полученных значений в зависимости, во-первых, от численного метода вычислений, а во-вторых, от значений количества шагов s_α или фиксированного шага h_α, на основе которой формируются итоговые выводы по работе, заполняется отчет с последующей сдачей преподавателю и предлагается ответить на вопросы проверочного тестирования.

Таблица 12

Совокупная таблица по лабораторной работе № 3

3.2.4. Лабораторная работа № 4

Название работы с указанием имени программы и соответствующего раздела высшей математики: приближенные решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с использованием методов Эйлера, Рунге-Кутта второго, четвертого порядков точности и их сравнительный анализ (программа *"APROXDFE"*, раздел *"Дифференциальные уравнения"*).

Цель работы: осуществить приближенные решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с использованием методов Эйлера, Рунге-Кутта второго и четвертого порядков точности для различных условий варьирования значений исходных данных с последующим проведением необходимых сравнительных анализов вычислительных процедур с применением представленной в графическом калькуляторе программы *"APROXDFE"*.

Теоретический аспект

При решении обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, часто встречающихся при построении математических моделей различных явлений и процессов, нередка проблема невозможности или сложности решения данных уравнений.

В подобных ситуациях для решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка используют рассматриваемые в рамках данной лабораторной работы численные методы. Суть применяемых численных методов заключается в том, что для заданного обыкновенного дифференциального уравнения вида $y' = f\left(x, y\left(x\right)\right)$ или $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ с начальными условиями, характеризующими координаты точки $\left(a_0, y\left(a_0\right)\right)$ на некотором отрезке $[a_0, b_0]$, необходимо рассчитать приближенное значение функции $y\left(b_0\right)$ в точке с координатами $\left(b_0, y\left(b_0\right)\right)$. Осуществляется деление данного отрезка на определенное количество равных меньших отрезков или шагов в зависимости от заданного значения количества шагов s_α или значения фиксированного шага h_α, расчет приближенного значения функции со значением абсциссы конечной точки на каждом из полученных отрезков, при этом приближенное значение функции $y\left(b_0\right)$ в точке с координатами $\left(b_0, y\left(b_0\right)\right)$ определяется как значение функции со значением абсциссы конечной точки последнего из полученных отрезков.

Рассмотрим логические основы реализации методов Эйлера, Рунге-Кутта второго и четвертого порядков для выполнения приближенных решений обыкновенных дифференциальных уравнений первого рода в зависимости от различных значений a_0, $y\left(a_0\right)$, b_0, s_α или h_α, заложенных в программу *“APROXDFE”*.

Метод Эйлера

Исходя из уравнения касательной, проходящей из точки с координатами $\left(x_{N-1}, y\left(x_{N-1}\right)\right)$ к графику исходной функции $y\left(x\right)$, то есть $y_1\left(x_N\right) = y(x_{N-1}) + y'(x_{N-1}) \cdot (x_N - x_{N-1})$, учитывая, что $y'(x_N) = f\left(x_N, f\left(x_N\right)\right)$ или $y'(x_{N-1}) = f\left(x_{N-1}, f\left(x_{N-1}\right)\right)$ и $x_N - x_{N-1} = h_\alpha$, получим соотношение: $\Delta y\left(x_N\right) = y_1\left(x_N\right) - y(x_{N-1}) = y'(x_{N-1}) \cdot (x_N - x_{N-1}) = f\left(x_{N-1}, y\left(x_{N-1}\right)\right) \cdot h_\alpha$.

Таким образом, в методе Эйлера вычисление приближенного значения координат точки исходной функции с координатами $\left(x_N, y\left(x_N\right)\right)$, исходя из приближенных значений координат точки $(x_{N-1}, y\,(x_{N-1}))$ исходной функции, осуществляется согласно следующим соотношениям:

$$y\,(x_N) = y\,(x_{N-1}) + \Delta y\,(x_N) = y\,(x_{N-1}) + f\,(x_{N-1}, y\,(x_{N-1})) \cdot h_\alpha,$$
$$x_N = x_{N-1} + h_\alpha.$$

Полученные соотношения можно получить и другими способами.

Например, используя формулу вычисления определенного интеграла для функции $f\,(x, y\,(x))$, учитывая, что $y'(x_N) = f\,(x_N, y\,(x_N))$ или $y'(x_{N-1}) = f\,(x_{N-1}, y\,(x_{N-1}))$ и $x_N - x_{N-1} = h_\alpha$, можно получить следующее соотношение:

$$\Delta y\,(x_N) = y\,(x_N) - y(x_{N-1}) = y'(x_{N-1}) \cdot (x_N - x_{N-1}) =$$
$$= \int\limits_{x_{N-1}}^{x_N} f\,(x_{N-1}, y\,(x_{N-1}))\,dx.$$

По формуле прямоугольников получим, что

$$\Delta y\,(x_N) = y\,(x_N) - y(x_{N-1}) = \int\limits_{x_{N-1}}^{x_N} f\,(x, y\,(x))\,dx = f\,(x_{N-1}, y\,(x_{N-1}))\,h_\alpha.$$

Тогда вычисление приближенных значений координат точки исходной функции с координатами $(x_N, y\,(x_N))$, исходя из приближенных значений координат точки $(x_{N-1}, y\,(x_{N-1}))$, по методу Эйлера осуществляется согласно следующим соотношениям:

$$y\,(x_N) = y\,(x_{N-1}) + \Delta y\,(x_N) = y\,(x_{N-1}) + f\,(x_{N-1}, y\,(x_{N-1})) \cdot h_\alpha,$$
$$x_N = x_{N-1} + h_\alpha.$$

Также соотношения метода из Эйлера можно получить как частный случай соотношений из методов Рунге-Кутта.

В методах Рунге-Кутта определенный интеграл определяется в виде интерполяционного многочлена согласно следующему соотношению:

$$y\,(x_N) = y\,(x_{N-1}) + \Delta y\,(x_N) = y\,(x_{N-1}) + \int\limits_{x_{N-1}}^{x_N} f\,(x_{N-1}, y\,(x_{N-1}))\,dx =$$

$$= y\,(x_{N-1}) + \sum_{J=1}^{S} p_J \cdot K_J\,(h_\alpha),$$

где p_J – коэффициенты, зависящие от S; $K_J\left(h_\alpha\right)$ – функции, зависящие от вида подынтегральной функции $f\left(x_{N-1}, y\left(x_{N-1}\right)\right)$ и значения фиксированного шага h_α.

В общем случае значения p_J и $K_J\left(h_\alpha\right)$ определяются согласно следующим соотношениям:

$$K_1\left(h_\alpha\right) = h_\alpha \cdot f\left(x_{N-1}, y\left(x_{N-1}\right)\right),$$

$$K_2\left(h_\alpha\right) = h_\alpha \cdot f\left(x_{N-1} + \alpha_2 \cdot h_\alpha, y\left(x_{N-1}\right) + \beta_{21} \cdot K_1\left(h_\alpha\right)\right),$$

$$K_3\left(h_\alpha\right) = h_\alpha \cdot f\left(x_{N-1} + \alpha_3 \cdot h_\alpha, y\left(x_{N-1}\right) + \beta_{31} \cdot K_1\left(h_\alpha\right) + \beta_{32} \cdot K_2\left(h_\alpha\right)\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$K_S\left(h_\alpha\right) = h_\alpha f\left(x_{N-1} + \alpha_S \cdot h_\alpha, y\left(x_{N-1}\right) + \beta_{S1} \cdot K_1\left(h_\alpha\right) + \ldots + \beta_{S,S-1} \cdot K_{S-1}\left(h_\alpha\right)\right).$$

Значения p_J, α_S и $\beta_{S,S-1}$ получают из соображений высокой точности вычислений.

Если $p_1 = 1$ и $K_1\left(h_\alpha\right) = h_\alpha \cdot f\left(x_{N-1}, y\left(x_{N-1}\right)\right)$, то получим соотношение:

$$y\left(x_N\right) = y\left(x_{N-1}\right) + \Delta y\left(x_N\right) = y\left(x_{N-1}\right) + \int\limits_{x_{N-1}}^{x_N} f\left(x_{N-1}, y\left(x_{N-1}\right)\right) dx =$$

$$= y\left(x_{N-1}\right) + p_1 \cdot K_1\left(h_\alpha\right) = y\left(x_{N-1}\right) + h_\alpha \cdot f\left(x_{N-1}, y\left(x_{N-1}\right)\right).$$

Таким образом, метод Эйлера является методом Рунге-Кутта первого порядка.

В данной лабораторной работе метод Эйлера (“METHOD OF EULER”) имеет следующую реализацию:

1. Итерация с индексом “N” ($N \geq 1$):

1.1. На искомом отрезке $[a_0, b_0]$ при соблюдении условия $a_0 < b_0$, исходя из вводимого или рассчитанного значения фиксированного шага h_α^E (при вводимом значении количества шагов s_α^E по формуле $h_\alpha^E = \frac{b_0 - a_0}{s_\alpha^E}$), выбирается абсцисса точки исходной функции с координатами $\left(x_N^E, y\left(x_N^E\right)\right)$, то есть x_N^E, согласно следующему соотношению: $x_N^E = x_{N-1}^E + h_\alpha^E$.

1.2. Осуществляется вычисление приближенного значения ординаты точки исходной функции с координатами $\left(x_N^E, y\left(x_N^E\right)\right)$, то есть $y\left(x_N^E\right)$, согласно следующим соотношениям:

$$y\left(x_N^E\right) = y\left(x_{N-1}^E\right) + \Delta y\left(x_N^E\right) = y\left(x_{N-1}^E\right) + h_\alpha^E \cdot f\left(x_{N-1}^E, y\left(x_{N-1}^E\right)\right),$$

$$x_N^E = x_{N-1}^E + h_\alpha^E.$$

1.3. Если достигнута истинность выражения $x_N^E \geq b_0$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_\alpha^E = N$, и приближенное значение исходной функции $y\left(b_0\right)$ в точке с координатами $\left(b_0, y\left(b_0\right)\right)$ определятся согласно соотношению $y\left(b_0^E\right) = y\left(x_N^E\right)$.

1.4. Если $x_N^E < b_0$, то осуществляется переход к следующей итерации.

Метод Рунге-Кутта 2-го порядка

В методе Рунге-Кутта второго порядка имеем следующие соотношения:

Если $p_1 = 0$, то $K_1\left(h_\alpha\right) = h_\alpha \cdot f\left(x_{N-1}, y\left(x_{N-1}\right)\right)$;

Если $p_2 = 1$, то $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\beta_{21} = \frac{1}{2}$ и

$$K_2\left(h_\alpha\right) = h_\alpha \cdot f\left(x_{N-1} + \frac{h_\alpha}{2}, y\left(x_{N-1}\right) + \frac{1}{2} \cdot K_1\left(h_\alpha\right)\right) =$$

$$= h_\alpha \cdot f\left(x_{N-1} + \frac{h_\alpha}{2}, y\left(x_{N-1}\right) + \frac{h_\alpha}{2} \cdot f\left(x_{N-1}, y\left(x_{N-1}\right)\right)\right).$$

В итоге получим соотношение:

$$y\left(x_N\right) = y\left(x_{N-1}\right) + \Delta y\left(x_N\right) = y\left(x_{N-1}\right) + \int\limits_{x_{N-1}}^{x_N} f\left(x_{N-1}, y\left(x_{N-1}\right)\right) dx =$$

$$= y\left(x_{N-1}\right) + \sum_{J=1}^{2} p_J \cdot K_J\left(h_\alpha\right) = y\left(x_{N-1}\right) + p_1 \cdot K_1\left(h_\alpha\right) + p_2 \cdot K_2\left(h_\alpha\right) =$$

$$= y\left(x_{N-1}\right) + h_\alpha \cdot f\left(x_{N-1} + \frac{h_\alpha}{2}, y\left(x_{N-1}\right) + \frac{1}{2} K_1\left(h_\alpha\right)\right) =$$

$$= y\left(x_{N-1}\right) + h_\alpha \cdot f\left(x_{N-1} + \frac{h_\alpha}{2}, y\left(x_{N-1}\right) + \frac{h_\alpha}{2} \cdot f\left(x_{N-1}, y\left(x_{N-1}\right)\right)\right).$$

Тогда вычисление приближенных значений координат точки исходной функции с координатами $\left(x_N, y\left(x_N\right)\right)$, исходя из приближенных значений координат точки $\left(x_{N-1}, y\left(x_{N-1}\right)\right)$, по методу Рунге-Кутта второго порядка осуществляется согласно следующим соотношениям:

$$x_{(2N-1)/2} = x_{N-1} + \frac{h_\alpha}{2},$$

$$y\left(x_{(2N-1)/2}\right) = y\left(x_{N-1}\right) + \frac{h_\alpha}{2} \cdot f\left(x_{N-1}, y\left(x_{N-1}\right)\right),$$

$$y\left(x_N\right) = y\left(x_{N-1}\right) + \Delta y\left(x_N\right) = y\left(x_{N-1}\right) + h_\alpha \cdot f\left(x_{(2N-1)/2}, y\left(x_{(2N-1)/2}\right)\right),$$

$$x_N = x_{N-1} + h_\alpha.$$

В данной лабораторной работе метод Рунге-Кутта второго порядка (“METHOD OF RUNGA-KUTTA 2”) имеет следующую реализацию:

1. Итерация с индексом “N” ($N \geq 1$):

1.1. На искомом отрезке $[a_0, b_0]$ при соблюдении условия $a_0 < b_0$, исходя из вводимого или рассчитанного значения фиксированного шага h_α^{RK2} (при вводимом значении количества шагов s_α^{RK2} по формуле $h_\alpha^{RK2} = \frac{b_0 - a_0}{s_\alpha^{RK2}}$), выбирается абсцисса точки исходной функции с координатами $\left(x_N^{RK2}, y\left(x_N^{RK2}\right)\right)$, то есть x_N^{RK2}, согласно следующему соотношению: $x_N^{RK2} = x_{N-1}^{RK2} + h_\alpha^{RK2}$.

1.2. Осуществляется вычисление приближенного значения ординаты точки исходной функции с координатами $\left(x_N^{RK2}, y\left(x_N^{RK2}\right)\right)$, то есть $y\left(x_N^{RK2}\right)$, согласно следующим соотношениям:

$$x_{(2N-1)/2}^{RK2} = x_{N-1}^{RK2} + \frac{h_\alpha^{RK2}}{2},$$

$$y\left(x_{(2N-1)/2}^{RK2}\right) = y\left(x_{N-1}^{RK2}\right) + \Delta y\left(x_{(2N-1)/2}^{RK2}\right) = y_{N-1}^{RK2} + \frac{h_\alpha^{RK2}}{2} \cdot f\left(x_{N-1}^{RK2}, y_{N-1}^{RK2}\right),$$

$$y\left(x_N^{RK2}\right) = y\left(x_{N-1}^{RK2}\right) + \Delta y\left(x_N^{RK2}\right) = y_{N-1}^{RK2} + h_\alpha^{RK2} \cdot f\left(x_{(2N-1)/2}^{RK2}, y_{(2N-1)/2}^{RK2}\right),$$

$$x_N^{RK2} = x_{N-1}^{RK2} + h_\alpha^{RK2}.$$

1.3. Если достигнута истинность выражения $x_N^{RK2} \geq b_0^{RK2}$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_\alpha^{RK2} = N$, и приближенное значение исходной функции $y\left(b_0\right)$ в точке с координатами $\left(b_0, y\left(b_0\right)\right)$ определятся согласно соотношению $y\left(b_0^{RK2}\right) = y\left(x_N^{RK2}\right)$.

1.4. Если $x_N^{RK2} < b_0$, то осуществляется переход к следующей итерации.

Метод Рунге-Кутта 4-го порядка

В методе Рунге-Кутта четвертого порядка имеем следующие соотношения:

Если $p_1 = \frac{1}{6}$, то $K_1\left(h_\alpha\right) = h_\alpha \cdot f\left(x_{N-1}, y\left(x_{N-1}\right)\right)$.

Если $p_2 = \frac{1}{3}$, то $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\beta_{21} = \frac{1}{2}$ и

$$K_2\left(h_\alpha\right) = h_\alpha \cdot f\left(x_{N-1} + \frac{h_\alpha}{2}, y\left(x_{N-1}\right) + \frac{1}{2} \cdot K_1\left(h_\alpha\right)\right) =$$

$$= h_\alpha \cdot f\left(x_{N-1} + \frac{h_\alpha}{2}, y\left(x_{N-1}\right) + \frac{h_\alpha}{2} \cdot f\left(x_{N-1}, y\left(x_{N-1}\right)\right)\right).$$

Если $p_3 = \frac{1}{3}$, то $\alpha_3 = \frac{1}{2}$, $\beta_{31} = 0$, $\beta_{32} = \frac{1}{2}$ и

$$K_3\left(h_\alpha\right) = h_\alpha \cdot f\left(x_{N-1} + \frac{h_\alpha}{2}, y\left(x_{N-1}\right) + \frac{1}{2} \cdot K_2\left(h_\alpha\right)\right).$$

Если $p_4 = \frac{1}{6}$, то $\alpha_4 = 1$, $\beta_{41} = 0$, $\beta_{42} = 0$, $\beta_{43} = 1$ и

$$K_4\left(h_\alpha\right) = h_\alpha \cdot f\left(x_{N-1} + h_\alpha, y\left(x_{N-1}\right) + K_3\left(h_\alpha\right)\right).$$

В итоге получим соотношение:

$$y\left(x_N\right) = y\left(x_{N-1}\right) + \Delta y\left(x_N\right) = y\left(x_{N-1}\right) + \int\limits_{x_{N-1}}^{x_N} f\left(x_{N-1}, y\left(x_{N-1}\right)\right) dx =$$

$$= y\left(x_{N-1}\right) + \sum_{J=1}^{4} p_J \cdot K_J\left(h_\alpha\right) =$$

$$= y\left(x_{N-1}\right) + p_1 \cdot K_1\left(h_\alpha\right) + p_2 \cdot K_2\left(h_\alpha\right) + p_3 \cdot K_3\left(h_\alpha\right) + p_4 \cdot K_4\left(h_\alpha\right) =$$

$$= y\left(x_{N-1}\right) + \frac{h_\alpha}{6}\left(K_1\left(h_\alpha\right) + 2K_2\left(h_\alpha\right) + 2K_3\left(h_\alpha\right) + K_4\left(h_\alpha\right)\right).$$

Тогда вычисление приближенного значения координат точки исходной функции с координатами $\left(x_N, y\left(x_N\right)\right)$ исходя из приближенных значений координат точки $\left(x_{N-1}, y\left(x_{N-1}\right)\right)$ по методу Рунге-Кутта четвертого порядка осуществляется согласно следующим соотношениям:

$$\begin{gathered}
K_1\left(h_\alpha\right) = h_\alpha \cdot f\left(x_{N-1}, y\left(x_{N-1}\right)\right), \\
x_{(2N-1)/2} = x_{N-1} + \tfrac{h_\alpha}{2}, \\
K_2\left(h_\alpha\right) = h_\alpha \cdot f\left(x_{(2N-1)/2}, y\left(x_{N-1}\right) + \tfrac{K_1\left(h_\alpha\right)}{2}\right), \\
K_3\left(h_\alpha\right) = h_\alpha \cdot f\left(x_{(2N-1)/2}, y\left(x_{N-1}\right) + \tfrac{K_2\left(h_\alpha\right)}{2}\right), \\
[x_N = x_{N-1} + h_\alpha, \\
K_4\left(h_\alpha\right) = h_\alpha \cdot f\left(x_N, y\left(x_{N-1}\right) + K_3\left(h_\alpha\right)\right), \\
y\left(x_N\right) = y\left(x_{N-1}\right) + \Delta y\left(x_{N-1}\right) = \\
= y\left(x_{N-1}\right) + \tfrac{h_\alpha}{6}\left(K_1\left(h_\alpha\right) + 2K_2\left(h_\alpha\right) + 2K_3\left(h_\alpha\right) + K_4\left(h_\alpha\right)\right).
\end{gathered}$$

В данной лабораторной работе метод Рунге-Кутта четвертого порядка (“METHOD OF RUNGA-KUTTA 4”) имеет следующую реализацию:

1. Итерация с индексом “N” ($N \geq 1$):

1.1. На искомом отрезке $[a_0, b_0]$ при соблюдении условия $a_0^{RK4} < b_0^{RK4}$, исходя из вводимого или рассчитанного значения фиксированного шага h_α^{RK4} (при вводимом количестве шагов s_α^{MR} по формуле $h_\alpha^{RK4} = \frac{b_0 - a_0}{s_\alpha^{RK4}}$), выбирается абсцисса точки исходной функции с координатами $\left(x_N^{RK4}, y\left(x_N^{RK4}\right)\right)$, то есть x_N^{RK4}, согласно следующему соотношению: $x_N^{RK4} = x_{N-1}^{RK4} + h_\alpha^{RK4}$.

1.2. Осуществляется вычисление приближенных значений ординат точки исходной функции с координатами $\left(x_N^{RK4}, y\left(x_N^{RK4}\right)\right)$, то есть $y\left(x_N^{RK4}\right)$, согласно соотношениям:

$$K_{1N}\left(h_\alpha^{RK4}\right) = h_\alpha^{RK4} \cdot f\left(x_{N-1}^{RK4}, y\left(x_{N-1}^{RK4}\right)\right),$$

$$x_{(2N-1)/2}^{RK4} = x_{N-1}^{RK4} + \frac{h_\alpha^{RK4}}{2},$$

$$K_{2N}\left(h_\alpha^{RK4}\right) = h_\alpha^{RK4} \cdot f\left(x_{(2N-1)/2}^{RK4}, y\left(x_{N-1}^{RK4}\right) + \frac{K_{1N}\left(h_\alpha^{RK4}\right)}{2}\right),$$

$$K_{3N}\left(h_\alpha^{RK4}\right) = h_\alpha^{RK4} \cdot f\left(x_{(2N-1)/2}^{RK4}, y\left(x_{N-1}^{RK4}\right) + \frac{K_{2N}\left(h_\alpha^{RK4}\right)}{2}\right),$$

$$x_N^{RK4} = x_{N-1}^{RK4} + h_\alpha^{RK4},$$

$$K_{4N}\left(h_\alpha^{RK4}\right) = h_\alpha^{RK4} \cdot f\left(x_N^{RK4}, y\left(x_{N-1}^{RK4}\right) + K_{3N}\left(h_\alpha^{RK4}\right)\right),$$

$$y\left(x_N^{RK4}\right) = y\left(x_{N-1}^{RK4}\right) + \Delta y\left(x_{N-1}^{RK4}\right) =$$

$$= y\left(x_{N-1}^{RK4}\right) + \frac{h_\alpha^{RK4}}{6}\left(K_{1N}\left(h_\alpha^{RK4}\right) + 2K_{2N}\left(h_\alpha^{RK4}\right) + \right.$$

$$\left. +2K_{3N}\left(h_\alpha^{RK4}\right) + K_{4N}\left(h_\alpha^{RK4}\right)\right).$$

1.3. Если достигнута истинность выражения $x_N^{RK4} \geq b_0$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_\alpha^{RK4} = N$, и приближенное значение исходной функции $y(b_0)$ в точке с координатами $(b_0, y(b_0))$ определятся согласно соотношению $y\left(b_0^{RK4}\right) = y\left(x_N^{RK4}\right)$.

1.4. Если $x_N^{RK4} < b_0$, то осуществляется переход к следующей итерации.

Описание этапов проведения лабораторной работы

Лабораторная работа по реализации приближенных решений дифференциальных уравнений первого порядка с использованием методов Эйлера, Рунге-Кутта второго и четвертого порядков для различных условий варьирования значений исходных данных с последующим проведением необходимых сравнительных анализов вычислительных процедур с применением представленной в графическом калькуляторе программы *“APROXDFE”* может быть разделена на три этапа.

I этап. “Приближенные решения дифференциальных уравнений первого порядка с помощью стандартных встроенных функций графического калькулятора”.

На данном этапе преподаватель разделяет исходную группу студентов на определенное количество малых групп по 3-4 студента, что позволяет выявить различные личностные психологические особенности студентов, каждой из которых предлагаются различные исходные данные символьной записи функции двух переменных $f\left(x, y\left(x\right)\right)$, значений a_0, b_0 и количества шагов s_α или фиксированного шага h_α.

Реализация точных решений дифференциальных уравнений первого порядка может осуществляться с помощью стандартных встроенных функций калькулятора комбинированным *аналитическим* и *графическим* методами – выполнение совместных математических вычислений и функционального анализа с использованием стандартных функций в режиме выполнения решений дифференциальных уравнений “*DIFFerential EQuation*”.

II этап. “Приближенные решения дифференциальных уравнений первого порядка в зависимости от различных значений количества шагов s_α *или фиксированного шага* h_α *с применением представленной в графическом калькуляторе программы “APROXDFE”.*

На данном этапе преподаватель для каждой из малых групп студентов, сформированных на первом этапе, предлагает исходные данные символьной записи самой функции двух переменных $f\left(x, y\left(x\right)\right)$, значений a_0, b_0 и количества шагов s_α или фиксированного шага h_α в рамках одной малой группы.

Предполагается, что студенты предварительно по символьной записи самой функции двух переменных $f\left(x, y\left(x\right)\right)$, а также по предполагаемым значениям концам одного из интервалов изоляции a_0 и b_0 реализуют итерации с индексами “1”, “2” и “3” согласно методам Эйлера, Рунге-Кутта второго и четвертого порядков.

После этого студенты проведут соответствующие необходимые расчеты с применением реализованной в графическом калькуляторе программы *“APROXDFE”*.

III этап. “Сравнительный анализ методов Эйлера, Рунге-Кутта второго и четвертого порядков в результате реализации приближенных решений дифференциальных уравнений первого порядка в зависимости от различных значений количества шагов s_α или фиксированного шага h_α”.

На данном финальном этапе преподаватель для каждой из малых групп, сформированных на первом этапе, предлагает провести сравнительный анализ реализованных на втором этапе приближенных решений дифференциальных уравнений первого порядка в зависимости от различных значений количества шагов s_α или фиксированного шага h_α.

Для этого согласно результатам расчетов необходимо заполнить совокупную таблицу 13 полученных значений в зависимости, во-первых, от численного метода вычислений, а во-вторых, от значений количества шагов s_α или фиксированного шага h_α, на основе которой формируются итоговые выводы по работе, заполняется отчет с последующей сдачей преподавателю и предлагается ответить на вопросы проверочного тестирования.

Таблица 13

Совокупная таблица по лабораторной работе № 4

3.3. Типология видов наглядности в обучении математике

Рассматривая основные компоненты наглядного моделирования в обучении, мы выяснили, что доминантой процесса является проектирование наглядного образа восприятия, представления и воображения средствами знаково-символической деятельности (например, моделированием). Так как “наглядность есть особое свойство психических образов, создаваемых в процессах восприятия, памяти, мышления" [238], то проектируемая наглядность аккумулирует в себе учет наиболее известных и существенных закономерностей психо-физиологических процессов познавательной деятельности обучаемого по овладению существом математических абстракций. В этом смысле в идеале проектируемая наглядность становится статистически универсальной для репрезентативной выборки обучаемых в процессе изучения математики, это позволяет, с одной стороны, приблизить наглядное моделирование в обучении математике к уровню педагогической технологии, а с другой – возвращает свойство наглядности математическому объекту (в процессе наглядного моделирования в обучении).

Рассмотрим следующий пример. Понятие окрестности точки $z = z_0$ на расширенной комплексной плоскости $\mathbf{C}^*$ определяется в двух разновидностях:
если $z_0 \in \mathbf{C}$, то

$$U(z_0) = \{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| < \varepsilon\};$$

если $z_0 = \infty \in \mathbf{C}^*$, то

$$U(\infty) = \{z \in \mathbf{C} : |z| > R\}.$$

Обе знаково-символические формы воспринимаются обучаемым по отдельности неустойчиво как в перцептивном, так и в мнемических процессах, хотя и обладают наглядностью, в традиционном смысле присущей этим самым математическим объектам. Это подтверждается многолетними наблюдениями авторов и возможностью адекватного графического моделирования:

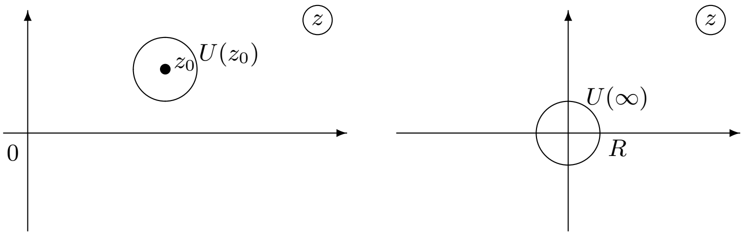


Рис. 33

Однако само понятие окрестности точки в $\mathbf{C}^*$ как бы раздваивается, что не способствует адекватному восприятию этого математического объекта. Существуют как бы два различных определения окрестности, не связанные друг с другом. Постижение сути этого абстрактного понятия достигается через дополнительное моделирование, использующее стереографическую проекцию; сфера Римана, являясь моделью $\mathbf{C}^*$, дает возможность единой трактовки окрестности, в том числе и для ∞:

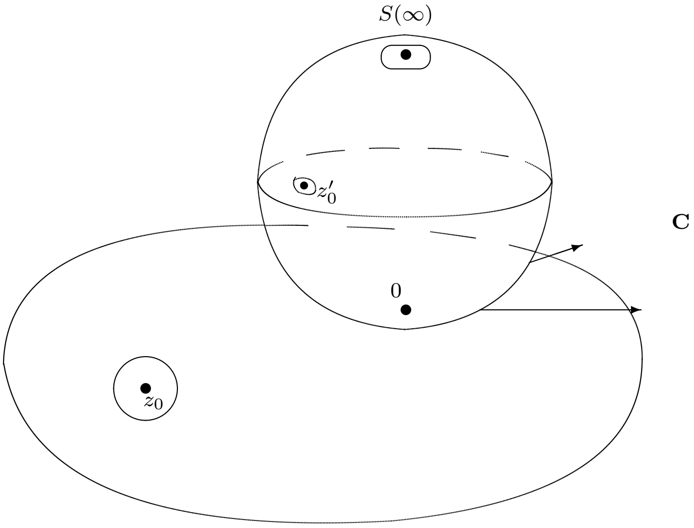


Рис. 34

Но это свойство математического объекта (понятия окрестности точки на комплексной плоскости) активно формируется преподавателем в конкретных формах представления знания. Поэтому проектировочная деятельность в рамках соответствующего целеполагания наглядного моделирования в обучении несет в себе черты методологической направленности, пусть даже неосознанной. Вряд ли классики комплексного анализа Б. Риман, О. Коши, Г. Миттаг-Лефлер и др. понимали значимость проявления методологической сущности понятия окрестности в $\mathbf{C}$, но интуитивно блестяще “улавливали” эту наглядность в математическом объекте. Таких ярких методических находок в математике огромное множество, их только необходимо классифицировать, расширить их возможности для адекватного восприятия и сделать их появление закономерностью процесса, причем сам преподаватель может и должен стать творцом содержания наглядного моделирования в обучении математике.

В процессе обучения математике наглядность математических объектов (или перцептивных образов) выполняет следующие функции:

– **перцептивно-мнемическая**, способствование лучшему восприятию и запоминанию, опора на нейрофизиологические закономерности восприятия, мышления и памяти, психофизиологические закономерности восприятия;

– **семантическая**, расширение знаково-символического опыта оперирования с математическими объектами (в том числе вербального);

– **дидактическая**, создание условий для когнитивной визуализации нового знания, проникновения в сущность понятий и теорем, квазиисследовательской деятельности студентов;

– **развивающая**, способствование развитию зрительной памяти, пространственного мышления, операций мышления (анализ, синтез, конкретизация, обобщение и т.п.), математических способностей;

– **профессионально-педагогическая**, обеспечивающая оптимальное дидактическое средство для проектирования будущей профессионально-математической деятельности в средней школе;

– **стимулирующая**, создание условий для поляризованного восприятия, устойчивого интереса, эмоционального и исторического фона, произвольного и непроизвольного внимания;

– **эвристическая**, создание ситуаций “интеллектуального затруднения” неполной информацией о формируемой модели, создание ситуаций на поиск ошибок [247], учебная деятельность на основе вариативности, самостоятельности и критичности;

– **иллюстративная**, способствующая оперативной адекватности восприятия математического знания, формированию системности знаний, созданию внешней опоры для внутренних действий обучаемых;

– **воспитывающая**, создание условий для познавательной и творческой активности, целостности восприятия математических объектов, взаимопереходов знаково-символических систем, формирования типологических свойств личности обучаемого.

Рассмотрим следующий пример. В математическом анализе кривых базовую роль играет понятие дифференциалов дуги: первого ds, второго d^2s и т.д. Легко построить адекватную наглядную модель первого дифференциала ds, именно:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

где $y = y(x)$ – непрерывно-дифференцируемая функция, dx, dy – дифференциалы независимой и зависимой переменных соответственно. Тогда получим следующие иллюстрации:

Рис. 35

$$dy = f'(x_0)dx = |ML|; \quad dx = |M_0L|; \quad ds = |M_0M|,$$

или в вербальном выражении – геометрически первый дифференциал дуги в точке $x = x_0$ есть приращение длины касательной l при переходе от x_0 к $x_0 + dx$.

Но как только мы задумаемся об адекватной характеристике d^2s, то быстро выясняется, что кроме аналитического выражения геометрически (наглядно) d^2s ни в одном учебном руководстве никто не выражал. Возникает довольно несложная математическая проблема, решение которой дает мощное средство устойчивости возникающего перцептивного образа (необходимо использовать не линейную, а квадратичную аппроксимацию в точке $x = x_0$). Педагогическая целесообразность таких находок очевидна.

Таким образом, наглядность – не только особое свойство психических образов, но и свойство математического объекта в рамках определенного дидактического процесса. Таковым он становится, когда у статистически достоверной выборки обучаемых возникают наглядные перцептивные образы (а значит, и у генеральной совокупности обучаемых). Это, возможно, снимает рассуждения такого свойства: “Поэтому можно говорить (и обычно так всегда и делают), что тот или иной предмет, явление, событие наглядны, имея в виду, что для нас наглядны образы этих объектов” [238].

Имеется в виду процесс наглядного моделирования в обучении, когда наглядность математического объекта определяется соответствующими критериями.

Наглядность математического объекта (или перцептивного образа) определяется, как уже отмечалось, факторами восприятия, представления, мнемическими процессами в их единстве на основе диагностируемого целеполагания. Следующие **критерии** определяют существо наглядности математического объекта:

– диагностируемое целеполагание целостности математического объекта;

– понимание обучаемым сущности математического объекта (адекватность восприятия);

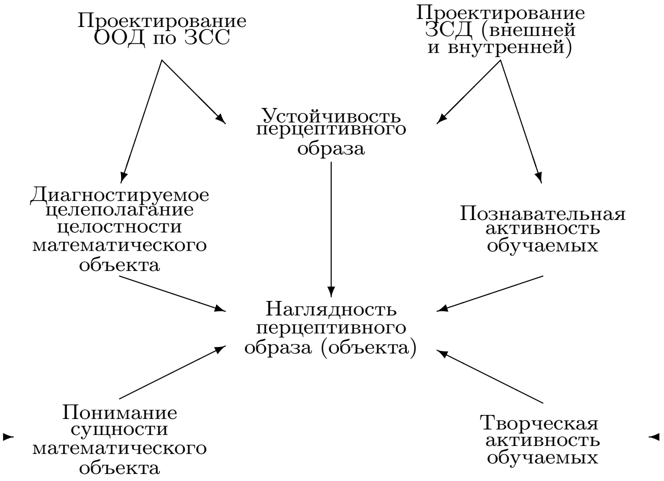
– устойчивость перцептивного образа и представления;

– познавательная и творческая активность обучаемого на основе комфортности и успешности обучения.

Первый и третий критерий обуславливаются проектированием ООД со знаково-символическими средствами дидактического процесса, второй и четвертый – знаково-символической деятельностью как обучаемого, так и обучающего (как внешнего, так и внутреннего плана). Более наглядно это представляется на следующей схеме:

Схема 12

Структура критериев наглядности перцептивного образа



Данная типология критериев наглядности в обучении математике позволяет определить типологию видов наглядности. Тогда получим следующую таблицу соответствия (см. схему 13).

Так как материализация наглядности математического объекта осуществляется в процессе обучения математике совокупностью материальных, материализованных, идеальных, речевых действий, совершаемых как обучающим, так и обучаемыми в ходе реализации дидактической цели наглядного моделирования в обучении, то виды наглядности будем характеризовать приемами знаково-символической деятельности, адекватной той или иной компоненте целостности математического объекта. Объективной основой целостности восприятия является целостность предметов и процессов реального мира. Структура – одна из основных характеристик целостности объекта.

Схема 13

Типология видов наглядности в обучении математике

Критерии наглядности математического объекта	Виды наглядности математического объекта	Тип восприятия
Целеполагание целостного объекта	Структурная	Сукцессивный
	Оперативная	Симультанный
Устойчивость перцептивного образа	Формализованная	Симультанный
Понимание сущности объекта	Преемственности	Сукцессивный
Познавательная и творческая активность	Фоновая	Сукцессивный

Когда происходит восприятие сложного объекта (или большого по времени и пространству), возникает противоречие с психо-физиологическими возможностями организма, поэтому либо синтез последовательных локальных восприятий происходит уже в пространстве субъекта (нейронном поле) в условиях произвольности повторного обращения к тем или иным частям объекта, либо проектируется модель (схема) объекта (его структура) с оптимально комфортным и устойчивым восприятием.

Применительно к математическим объектам сокращение описания достигается благодаря знаково-символической деятельности. Использование этих элементов математического языка позволяет преодолеть ограничения, свойственные восприятию, мнемическим процессам и мышлению. Последнее наиболее приемлемо при оперировании со сложными математическими объектами и определяет подход к первому виду наглядности.

Структурная наглядность – это свойство математического объекта (и его перцептивного образа), приобретаемое в процессе знаково-символической деятельности по формированию внутренней структуры объекта, базирующейся на структурных внешних действиях.

К этому виду наглядности отнесем выделение основного материала, построение модели с опорой на устойчивые ассоциации, характеризующиеся полнотой изложения основных понятий, методов, теорем (запись теорем в логической форме), доведение изучаемого материала до узнаваемости объекта восприятия, построение системы непрерывного хранения информации (составление контролирующих программ для ЭВМ, для малых форм информатизации). Примером использования структурной наглядности служит выделение в процессе восприятия учебного материала опорных качеств предмета, составление опорной таблицы кодировки, использование блок-схем, логический анализ теорем, составление проспект-схемы изучения темы, задачного минимума, лабораторного практикума. Структурная наглядность активизирует мыслительную деятельность в процессе восприятия, учит логически мыслить, выделять существенное в плане перцепции. Расположение изучаемых объектов в определенной системе улучшает восприятие, вызывая минимальные усилия со стороны органов чувств.

Логический анализ теоремы может включать: логическую запись формулировки теоремы, формулировки обратной и противоположной теоремы, метод доказательства, блок-схему доказательства, контрпримеры к условиям теоремы с графическими иллюстрациями и т. п.

Основные умения и навыки представлены в задачном минимуме, системе опорных банков (дифференцирование, интегрирование, неравенства, пределы последовательностей и функций, графики элементарных функций) с обязательным указанием соответствующих контрпримеров.

Аннотированные экзаменационные программы с детализацией по знаниям, умениям, навыкам и методам выдаются каждому студенту в начале семестра и способствуют мотивации учебной деятельности студентов.

Приведенные выше приемы моделирования учебной деятельности способствуют профессионализации процесса обучения и выработке потребности и навыков в планировании, постановке стратегических и тактических целей в изучении разделов математического анализа.

Оперативная наглядность – процесс формирования модели в учебной деятельности, базирующийся на опорных внешних действиях. К оперативной наглядности отнесем демонстрационную (использование при изложении материала рисунков, чертежей, схем, таблиц, плакатов, графиков, моделей, магнитных и печатных пособий, фотографий, муляжей) и технические средства обучения (диафильмы, кинофильмы, кодопозитивы, кинокольцовки, элементы программированного обучения, персональные компьютеры). Этот вид наглядности широко используется в практике школы и довольно обстоятельно изложен в методической литературе. Применение оперативной наглядности расширяет число каналов передачи и получения информации, ускоряя и углубляя восприятие изучаемого материала. В то же время применение оперативной наглядности может служить мотивацией творческой деятельности ученика, позволяет увидеть процессы в динамике, способствует установлению межпредметных связей, расширяет область практического применения изучаемых вопросов.

Использование оперативной наглядности в процессе преподавания математического анализа является наиболее естественным актом доступности изложения и достаточно подробно и разнообразно освещено в методической литературе. Однако концептуальный подход и здесь дает принципиальные методические новинки. Например, математическая формула или знаково-символическая форма есть адекватное отражение математического содержания (формулировка теоремы, логическая запись определения и т. п.) в форме оперативной наглядности, которое имеет и устное (словесное) отражение. В соотношении между этими двумя формами отражения математического знания заключено одно из важных профессиональных умений будущего учителя математики: умение “описать словами” или представить в устной форме математическое действие или математическую формулу и наоборот. Весьма традиционным для математического анализа является нахождение графического отражения математического знания. Однако и этот аспект оперативной наглядности может принять эвристическую форму. Например, хорошо известен геометрический смысл ds – дифференциала дуги гладкой кривой $y = f(x)$. Тем не менее выяснение геометрического смысла d^2s представляет серьезную математическую задачу (необходимо параболическое приближение в точке графика функции f).

Возможность ввести в процесс преподавания математического анализа решение реальных физических задач, проявление сути понятий и теорем вычислительными средствами позволяет приблизить преподавание к естественно-научным истокам дисциплины, проследить исторический процесс становления математики, ее практических приложений. Здесь формируется еще одно профессиональное умение будущего учителя – доведение математического результата до этапа непосредственного расчета, в том числе с использованием информационно-коммуникационных технологий. В частности, это разработка прикладных вопросов математических курсов, создание лабораторных практикумов, компьютерных тренажеров, контролирующих и обучающих программ с использованием информационно-коммуникационных технологий. Например, лабораторный практикум по разделу “Введение в анализ” содержит 20-25 полностью разобранных (с инструкциями, блок-схемами, программами и необходимыми теоретическими замечаниями) работ с использованием графического калькулятора. Вариантность лабораторных заданий, равно как и объем самого практикума, остаются в компетенции преподавателя. Особенность лабораторного практикума заключается в преимущественном решении задач на снятие качественных характеристик основных понятий, теорем, практических умений программными средствами, более глубокое уяснение их содержания, закрепление знаний по некоторым численным методам анализа.

Промежуточный контроль знаний обучаемых по сквозным темам способствует стабилизации остаточных фреймов и акцентированию на опорность, являясь в то же время контролем знаний по нескольким взаимосвязанным разделам.

Система контролирующих мероприятий служит получению обратной связи, стабилизации остаточных фреймов, систематизации и опорности, отработке практических навыков, способствует формированию профессиональных умений, овладению межпредметными информационными связями.

Формализованная наглядность – процесс формирования модели в учебной деятельности, базирующийся на структурных внешних действиях, процесс формирования “внешней” структуры, структуры обозначения, выделения и размещения текста на доске или в учебном пособии. К этому виду наглядности отнесем: использование при записи петита, курсива, рамок, абзацев, выделение отдельных формул в строчку, подчеркивание важных слов и предложений, обозначение значимости текста на полях различными знаками, обозначение начала и конца доказательства, порций материала, использование цвета для выделения важных формул, элементов. Этот вид наглядности способствует лучшему восприятию, осмыслению и запоминанию материала.

Фоновая наглядность – процесс моделирования специфических особенностей данного организованного набора знаний, носящий мотивированный сквозной характер, обеспечивающий лучшее восприятие и усвоение. Фоновая наглядность характеризуется длительностью, неодномоментностью, опорностью ассоциативно-рефлекторных механизмов восприятия, "ненавязчивостью" побочно применяемых действий. В методологии фоновой наглядности лежат психофизиологические закономерности организации непроизвольного внимания, исследования Н. Н. Ланге по организации волевого внимания, концепция Д. Н. Узнадзе об установке как целостном состоянии мобилизованного индивида на определенное действие, обусловленное потребностью субъекта и соответствующей объективной ситуацией. Обучение – это формирование временной последовательности режимов, которые настраивают чувствительность рецепторов на заданную функцию, на формирование результата внутренних действий, адекватных категории цели. Примером применения этого вида наглядности могут служить приемы создания фона настроения, создания пониженного фона интенсивности вокруг опорной информации, привлечение исторического материала, применение различных мнемических эффектов. Целевая установка, мотивация, внешнее ненавязчивое побуждение учителя к внутренним действиям ученика, адекватным поставленной цели, – составляющие компоненты фоновой наглядности. Особое значение этот вид наглядности приобретает в условиях профильной дифференциации. Фоновая наглядность имеет большое значение в процессе обучения и воспитания. От умелого использования ее зависит возникновение у учащихся потребности учиться, самостоятельно добывать знания, эмоциональное удовлетворение от учебы, воспитание воли, культуры поведения. Фоновая наглядность – это тот фактор, который позволяет проводить воспитательную работу в процессе обучения (обучать воспитывая и воспитывать обучая).

Создание конкретизационного фона характерно, например, для уровня глобальной структуры технологии наглядного моделирования в обучении, так как связано с длительностью и дискретностью восприятия математических объектов. Так, при линейном развертывании базовых понятий непрерывности и производных функции проблема согласования этих понятий и проявления сущности устойчиво моделируется на схеме 14 с. 274.

Для уровня локальной модельности конкретизационный фон характеризуется вариативностью формы предъявления базового знания и уровнями конкретизации с обязательным устойчивым в плане восприятия элементом. Так, характеризуя систему формы записи производной, фиксируем обозначение Лагранжа y', Лейбница $\frac{dy}{dx}$, Коши D_y, Ньютона $\dot{y}$, каждое из которых сохраняет свое назначение в различных областях математического анализа до настоящего времени, а предъявление ломаной дает устойчивый эффект конкретизации для понятия спрямляемой дуги.

Для уровня управления познавательной деятельностью обучаемых можно использовать конкретизационный фон “10”. В процессе обучения математике студент произвольно ставится в “ситуацию интеллектуального затруднения” – привести 10 примеров (частных случаев) того или иного математического знания (например, 10 различных примеров трансцендентных чисел). Репродуктивный уровень усвоения позволяет студенту дать 2–3 примера (которые были разобраны на лекции или практическом занятии), дальнейшее рассмотрение либо требует более качественного усвоения, либо стимулирует квазиисследовательскую деятельность студента. Такое управление познавательной деятельностью проектирует движение к III и IV уровню усвоения математического знания по В. П. Беспалько и создает устойчивый мотивационно-конкретизационный фон усвоения.

Схема 14

Фон конкретизации функциональным элементом f

Основная линия

Непрерывность Производная

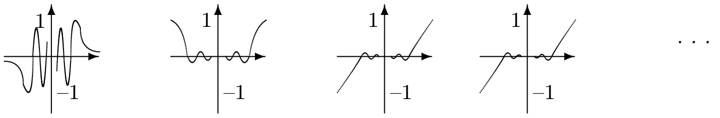
$$\mathrm{Lim} f \Rightarrow \quad f \quad \Rightarrow \exists f'(0) \Rightarrow \exists f''(0) \Rightarrow \ldots \exists f^{(n)}(0)$$

$$\bar{\exists} f'(0) \qquad \bar{\exists} f''(0) \qquad \bar{\exists} f'''(0) \qquad \bar{\exists} f^{(n+1)}(0)$$

Конкретизационный фон

$$\begin{matrix} f(x)=\sin\frac{1}{x} \\ f(0)=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} f(x)=x\sin\frac{1}{x} \\ f(0)=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} f(x)=x^2\sin\frac{1}{x} \\ f(0)=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} f(x)=x^4\sin\frac{1}{x} \\ f(0)=0 \end{matrix} \Rightarrow \ldots \begin{matrix} f(x)=x^{2n}\sin\frac{1}{x} \\ f(0)=0 \end{matrix}$$

Визуализация



Дистрибутивная наглядность характеризуется структурными внешними действиями при изучении сформированной модели в процессе учебной деятельности. К этому виду наглядности отнесем структуру размещения материала (основные и технические теоремы), выделение базовых определений, порций материала, классификацию методов доказательства. Этот вид наглядности широко используют авторы учебников и учебных пособий. Использование такого вида наглядности позволяет расставить акценты на изучаемом материале, делает его более доступным для восприятия и усвоения, учит логически мыслить, анализировать, выделять главное и устанавливать связи между изучаемыми понятиями, уметь ориентироваться в большом объеме информации, воспитывает критическое отношение, учит быть собранным.

Наглядность преемственности характеризуется опорностью ассоциативных связей внутри раздела, предмета и межпредметных. Сюда отнесем структуру взаимосвязей, методы изложения, пропедевтику, опорные мотивационные исторические задачи, циклы задач исследовательского характера. Применение этого вида наглядности зависит от того, насколько глубоко учитель владеет материалом, от творческого использования им методов изложения материала, от его эрудиции, общей культуры, заинтересованности в результатах своего труда.

Таким образом, обоснование типологии видов наглядного моделирования в обучении создает теоретическую базу для управления познавательной деятельностью студентов в процессе обучения математике, обеспечивает технологизацию дидактического процесса.

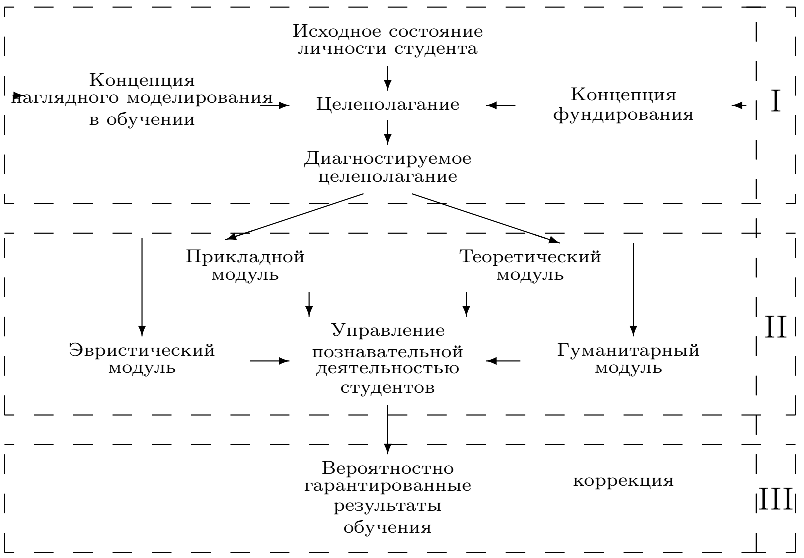
3.4. Методика изучения раздела “Дифференциальное и интегральное исчисление”. Организация научно-исследовательской работы студентов

Технология наглядного моделирования в обучении математике представляет собой проектирование реального учебного процесса, соединяющее в себе теоретическую, процессуальную и результативную компоненты. Педагогическая технология представляет собой существо совместной деятельности преподавателя и студента, ведущей к достижению планируемых результатов. В то же время методическое оформление сути технологического процесса придает технологии гибкость и определяется, в частности, как содержанием учебной информации, так и педагогическим мастерством преподавателя.

Следующая схема определяет основные компоненты методики изучения раздела математики.

Схема 15

**Схема
методики изучения раздела математики
(лекция, практическое занятие, тема, дисциплина и т.п.)**



I – блок исходных характеристик;

II – блок функционирования и управления;

III – блок результативности обучения.

Незамкнутость методических параметров обратной связи на блок исходного состояния личности студента означает возможность вариативности методики в зависимости от интеллектуальных и личностных качеств студента. Это означает необходимость создания психологической службы при факультетах с целью мониторинга динамики функционирования личностной сферы каждого студента, а также повышения качества психолого-педагогической подготовки преподавателя с целью профессиональной готовности к психологической дифференциации обучения математике.

Ниже конкретизируется методика изучения раздела математического анализа, в основе диагностируемого целеполагания которого положены: целостность и устойчивость знаний, формирование обобщенных умений и общеучебных навыков, развитие математического мышления.

Блок исходных характеристик. Процесс обучения математике (например, математическому анализу) предполагает последовательное изучение заранее обусловленных разделов: число, функция, последовательность,..., основные теоремы дифференциального исчисления,... Этот перечень, по существу, дается учебной программой (по математическому анализу) и может быть представлен схемой

$$\underset{A}{\boxed{\downarrow}} \qquad \underset{B}{\boxed{\downarrow}} \qquad \underset{C}{\boxed{\downarrow}} \qquad \ldots \qquad \underset{X}{\boxed{\downarrow}}\ ,$$

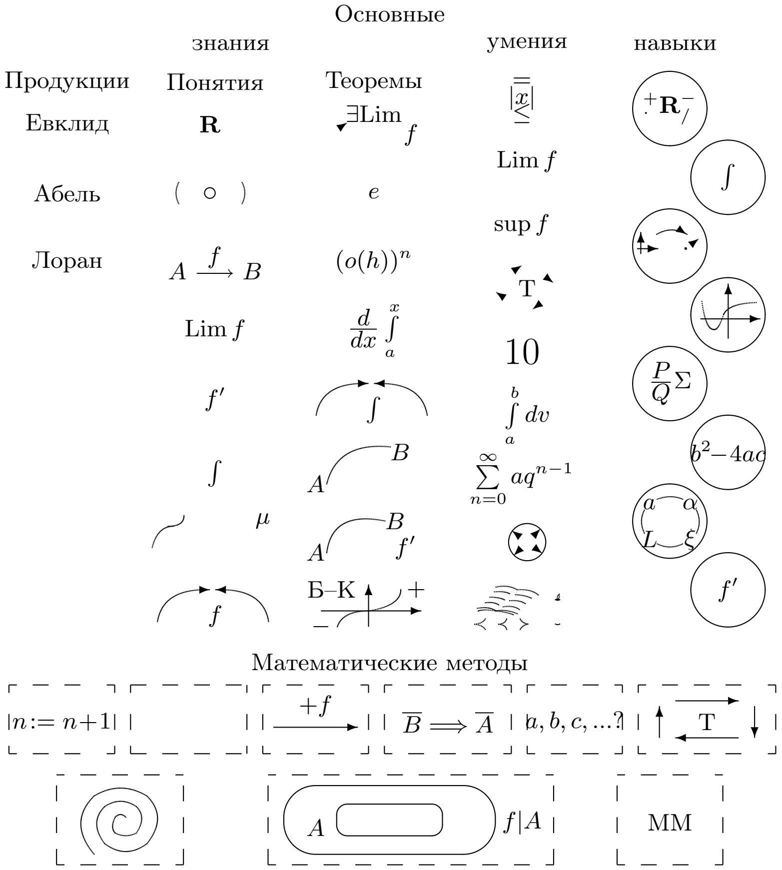
причем каждая тема A, B, C,..., X представлена блоком, а ее прохождение – стрелкой. Здесь ↓ означает переход от простого к сложному, от знания неполного к более полному, причем ↓ означает не только логическое строение данного материала, но и превалирующее направление формирования понятий, умений и практических навыков. Однако в процессе преподавания естественно приходится устанавливать и проявлять внутренние взаимосвязи между блоками $\boxed{\downarrow}$; среди этих взаимосвязей есть существенные, основные, которые, будучи упорядоченными, образуют сквозные связи между блоками, объединенные той или иной сквозной темой, материализацией которых выступает спираль фундирования. Последние же цементируют учебный материал, способствуя дидактическим целям и являясь внешними опорами восприятия обучаемых. В то же время выявление сквозных тем в качестве существенных внутренних взаимосвязей позволяет активизировать память студентов, варьируя следы предыдущих знаний (остаточные фреймы) в процессе обучения математике. Выделение, систематизация и реализация сквозных тем (а также спиралей фундирования) в курсе математического анализа имеют явную профессионально-педагогическую направленность, поскольку единство математики в реализации сквозной темы выступает прежде всего единой формой (предел, производная, непрерывность,...), которая затем конкретизируется, выстраиваясь в дидактически оправданную логическую цепь. Последовательное и настойчивое проведение этой идеи в процессе обучения формирует у будущих учителей **важное профессиональное умение – видеть за единой формой разнообразное содержание, объединенное единой логической основой.**

Лектор, работающий по данной технологии, прежде всего проводит качественный и количественный анализ содержания учебного материала: выделение основных понятий (число, окрестность, функция, предел, непрерывность, производная, интеграл, жорданова мера), основных теорем (теорема Больцано-Коши, теорема Лагранжа, теорема Тейлора и т. д.), основные умения (умение решать неравенства с модулем, умение находить предел функции, умение проводить исторический анализ понятий и теорем и т.п.), основные практические навыки (навык оперирования с действительными числами, вычислительная культура, навык дифференцирования и интегрирования, навык элементарного исследования функций и т.п.), основные методы (метод математической индукции, метод дихотомии, метод введения вспомогательной функции, метод “от противного”, метод неопределенных коэффициентов, метод продолжения, метод математического моделирования). Всякий навык в рамках данного курса вторичен и формируется из соответствующего умения, поэтому не следует основные умения и навыки рассматривать изолированно, тем более, что их отбор в определенной степени носит субъективный характер (научные интересы лектора, контингент студентов и т.п.). Основные знания, умения, навыки и методы, закодированные в знаково-символической форме, могут быть сведены в опорную таблицу 14 с. 279.

Знание основных положений дифференциального и интегрального исчисления, умение применять их в элементарной практической ситуации является необходимым для удовлетворительной оценки на курсовом экзамене. Детализацию основных знаний, умений, навыков и методов по курсу математического анализа функций одного действительного переменного можно найти в аннотированной программе экзаменационных вопросов.

Таблица 14

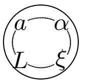
Опорная таблица курса "Введение в анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление"



3.4.1. Знания, умения, навыки и методы, необходимые для успешного усвоения материала (дифференциальное и интегральное исчисление)

> ...вместо этого я ограничивался возможно выпуклым, конкретным и впечатляющим развитием принципиальных моментов, я говорил больше о целях и тенденциях, о проблемах и методах, о связях основных понятий и идей анализа между собой и с приложениями...
>
> А. Я. Хинчин

f' 10

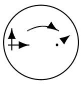


1. Задача о скорости прямолинейного движения материального тела, задача о линейной плотности материального стержня, задача о проведении касательной к кривой (понятие касательной). Определение производной, обозначения производной Лейбница, Ньютона, Лагранжа и Коши, различные формы записи (разностное отношение, приращения). Пример несуществования производной функции в точке (10 примеров). Пример вычисления по определению производной (10 примеров). Геометрический и механический смысл производной.

2. Определение бесконечной производной. Пример. Определение односторонних производных функций в точке. Пример. Доказательство теоремы о необходимом и достаточном условии существования конечной производной. Бесконечно малые функции. Определение дифференцируемой функции в точке. Доказательство теоремы о критерии дифференцируемости. Геометрический смысл условия дифференцируемости, уравнения касательной к графику функции в данной точке. Непрерывность – необходимое условие существования производной.

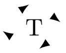
f'

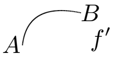
3. Дифференциал функции в точке. Геометрический и механический смысл дифференциала. Дифференциал как источник приближенных вычислений. Рассмотреть пример приближенного вычисления значений функции. Понятие производной функции и операции дифференцирования. Пример непрерывной функции, не дифференцируемой ни в одной точке области определения. Формулировка теорем о связи арифметических операций и дифференцирования, доказательство одной из теорем. Таблица производных.



4. Согласование операции дифференцирования с операцией обращения функции. Доказательство теоремы о нахождении производной обратной функции. Пример. Геометрическая иллюстрация основной формулы. Производные обратных тригонометрических функций. Цепное правило дифференцирования. Дифференцирование степенно-показательных и неявно заданных функций. Параметрическое дифференцирование. Индуктивное определение производных высших порядков, обозначение, бесконечно дифференцируемые функции, примеры. Формулы производных высших порядков основных элементарных функций, нахождение коэффициентов многочлена. Доказательство формулы Лейбница.

5. Индуктивное определение дифференциалов высших порядков. Доказательство формулы для высших дифференциалов. Формула Лейбница в дифференциалах. Инвариантность формы дифференциала первого порядка, пример. Неинвариантность формы дифференциалов порядка выше первого. Пример.





6. Теоремы Ферма и Ролля. Геометрическая иллюстрация. Доказательство теоремы Ферма. Три контрпримера для теоремы Ролля. Теорема Лагранжа. Геометрическая иллюстрация. Разрывы производной функции. Доказательство теоремы Лагранжа. Пример функции с разрывной производной функцией. Теорема Коши. Правило Лопиталя и его применение в анализе. Доказательство теоремы Коши. Формулировка правила Лопиталя для различных ситуаций. Пример нахождения предела функции с использованием правила Лопиталя.

$$\circ(h)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} aq^{n-1}$$

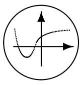
7. Задачи, приводящие к формуле Тейлора. Задача о коэффициентах многочлена и задача об аппроксимации функции многочленами. Доказательство формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Многочлен Тейлора. Остаточный член в форме Лагранжа. Построение многочлена Тейлора для элементарной функции. Вывод разложения в ряд двух основных элементарных функций.

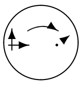
8. Дифференциальная характеристика монотонности функции. Доказательство критерия монотонного неубывания (невозрастания) дифференцируемой функции. Строгая монотонность и дифференцируемость. Контрпример. Приложение критериев монотонности к доказательству неравенств.

$$\sup f$$

9. Локальные и глобальные экстремумы функции. Критические точки. Три достаточных условия существования экстремума. Задача о наибольшем и наименьшем значении функции и глобальный экстремум. Связь его с локальным экстремумом. Схема исследования функции для нахождения глобального экстремума. Примеры локальных и глобальных экстремумов функции, стационарных и нестационарных критических точек. Доказательство одного из достаточных условий существования экстремума. Нахождение знака первой производной в критических интервалах (обосновать). Нахождение глобальных экстремумов функции. Задача о равновесии линейного стержня. Неравенство Гельдера. Вывод условия равновесия линейного стержня. Вывод неравенства Гельдера.

10. Выпуклость и вогнутость функции. Дифференциальная характеристика выпуклости (вогнутости) функции. Доказательство теоремы о дифференциальной характеристике выпуклости (вогнутости). Примеры выпуклых и вогнутых функций. Геометрическая характеристика выпуклости (вогнутости) функции. Промежутки выпуклости и вогнутости. Точки перегиба функции. Доказательство теоремы о геометрической характеристике выпуклости (вогнутости). Пример нахождения промежутков выпуклости и вогнутости.





11. Асимптоты функции. Схема исследования и построения графика функции. Определение и примеры горизонтальных, вертикальных и наклонных асимптот функции. (Вывод формул для нахождения наклонных асимптот функции.) Построение графиков элементарных функций.

$\int$

12. Задачи, приводящие к понятию первообразной функции. Задача о движении материального тела, о переменной площади. Задача об объеме конуса. Доказательство формулы общего вида семейства первообразных функций. Первообразная функция и ее свойства. Неопределенный интеграл и его свойства. Рассмотреть задачи о движении и переменной площади и др. Доказать два свойства неопределенного интеграла. Привести примеры неопределенного интегрирования. Таблица интегралов.

$\int$ $\frac{P}{Q}\Sigma$ $a, b, c, ...?$

13. Методы неопределенного интегрирования. Задача выражения первообразной (а значит неопределенного интеграла) в конечном виде. Построить метод интегрирования по частям как обращение операции дифференцирования произведения и то же самое о методе замены переменной. Привести примеры (по 5 примеров). Интегрирование рациональных функций. Простейшие дроби. Метод вычеркивания и неопределенных коэффициентов. Алгоритм интегрирования рациональной дроби. Интегрирование дроби третьего типа. Методы нахождения неопределенных коэффициентов на примерах. Метод Остроградского.

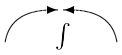
b^2-4ac

14. Интегрирование иррациональных функций. Выражение первообразной для рациональных функций в конечном виде. Метод рационализации подынтегрального выражения, примеры. Дробно-линейная

иррациональность, подстановки Эйлера на примерах. Интегрирование дифференциального бинома. Теорема Чебышева. Интегрирование некоторых трансцендентных функций.

$$\int\limits_a^b dv$$

15. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Задача о площади, о пути, о массе линейного стержня. Свойства разбиений отрезка (доказательство). Сопоставить предел по направленному множеству и предел последовательности. Интегральные суммы. Определенный интеграл Римана. Определение интеграла на языке (ε, δ) и направленного множества разбиений отрезка. Функция Дирихле неинтегрируема по Риману (обосновать). Доказать теорему об ограниченности интегрируемой по Риману функции.



16. Теорема существования интеграла. Классы интегрируемых по Риману функций. Доказательство существования одного из классов интегрируемых по Риману функций. Колебание функции на множестве и теорема существования интеграла (обосновать).

17. Суммы Дарбу и их свойства. Нижний и верхний интегралы Дарбу. Эквивалентное определение интеграла Римана. Доказательство свойств суммы Дарбу. Свойства определенного интеграла. Доказательство теоремы о среднем для интеграла и еще одного свойства интеграла Римана. Формулировка всех свойств.

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^x$$

18. Интеграл с переменным верхним пределом. Основная теорема интегрального исчисления. Доказательство основной теоремы. Формула Ньютона-Лейбница. Методы определенного интегрирования. Вывод формулы Ньютона-Лейбница. Доказательство одного из методов определенного интегрирования.

μ 10

19. Квадрируемость фигуры и ее площадь. Площадь криволинейной трапеции. Доказательство существования площади криволинейной трапеции. Пример неквадрируемой фигуры. Площадь в декартовых, полярных и параметрических координатах. Вывод всех формул с примерами (по 3 примера).

20. Кубируемость тела и его объем. Теорема существования объема. Доказательство теоремы существования объема. Примеры кубируемых тел. Объем прямого цилиндра. Объем тела вращения. Вывод формулы объема по квадрируемым сечениям. Пример нахождения объема тела вращения (по 3 примера).

◆

21. Спрямляемость дуги и её длина. Длина кривой в декартовых, полярных и параметрических координатах. Вывод одной из формул. Примеры. Площадь поверхности вращения в декартовых и параметрических координатах. Вывод формулы площади поверхности вращения. Пример. Формула в параметрических координатах.

22. Статические моменты и центр тяжести кривой и плоской фигуры. Первая и вторая теоремы Гельдина. Вывод формул для нахождения центров тяжести кривой. Доказательство второй теоремы Гельдина. Общая схема применения определенного интеграла.

23. Несобственные интегралы I и II рода. Признаки сходимости. Определение и примеры, сходимость и расходимость интегралов от неограниченных функций и по неограниченному промежутку. Доказательство одного из признаков сходимости. Пример применения признака сходимости несобственных интегралов.

Контрольные вопросы к экзамену

1. Какие связи между параметрической, полярной и декартовой системой координат?

2. Верно ли обратное утверждение к теореме Ферма?

3. Привести пример непрерывной функции, имеющей бесконечное число точек несуществования производной на конечном отрезке.

4. Дать геометрическую иллюстрацию теоремы Коши.

5. Какие условия необходимы и достаточны для строгого монотонного возрастания (убывания) дифференцируемой функции?

6. Как построить непрерывную кривую, сплошь заполняющую квадрат $[0,1;0,1]$ на плоскости $\mathbf{R}^2$?

7. Доказать бесконечную дифференцируемость в точке $x = 0$ функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

8. Вывести формулу для $(f_1 : f_2 : ... : f_n)'$.

9. Указать элементарные функции, для которых константа в формуле конечных приращений может быть конструктивно определена.

10. Рассмотреть пример функции и ее критической точки, когда не применимы все 3 достаточных условия существования экстремума.

11. Доказать теорему: для того, чтобы непрерывная на $\mathbf{R}$ функция была выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

12. Привести примеры функций, не интегрируемых в элементарных функциях.

13. Можно ли определить интеграл от неограниченной функции? на неограниченном промежутке?

14. Привести пример ограниченной неинтегрируемой по Риману функции.

15. Следует ли из интегрируемости $|f|$ интегрируемость f?

16. Найти связь между формулой Тейлора и формулой Лагранжа.

17.Найти связь между интегральной теоремой о среднем и дифференциальной теоремой о среднем (формула Лагранжа).

18. Каков геометрический смысл дифференциала дуги ds?

19. Доказать теорему о необходимом и достаточном условии интегрируемости ограниченной функции по Риману.

20. Вычислить объем эллипсоида (и, следовательно, шара), конуса, пирамиды; площадь круга (эллипса) и задачи подобного рода, относящиеся к школьной математике.

Основные умения и навыки представлены в задачном минимуме, системе опорных банков (дифференцирование, интегрирование, неравенства, пределы последовательностей и функций, графики элементарных функций) с обязательным указанием соответствующих контрпримеров, ядра базовых задач и методов расширения банков.

3.4.2. Блок функционирования и управления

Приемы локального моделирования включают: оперативную наглядность, кодирование знаково-символических средств, определение мотивационных блоков, построение семантических и реляционных сетей, структурных блок-схем, логический анализ теорем и структурный анализ понятий.

Ниже показаны методические приемы наглядного моделирования фоном и семантической сетью базовых теорем математического анализа (см. схему 16).

Как уже отмечалось ранее, целостность процесса восприятия целевой установки в процессе обучения математике является функциональной характеристикой возрастных и личностных особенностей обучаемых. При этом объектом восприятия (равно как и категории целостности) может выступать как математическое знание, умения или действие, так и процесс обучения математике или его этапы, фрагменты.

Схема 16

Фрейм теоремы

Фрейм
теоремы
о подпосле-
довательности

Логическая запись теоремы

$$\forall(x_n)\ \forall A\ \forall k\ ((\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} x_n = A \wedge (x_{n_k})) \Longrightarrow (\exists \operatorname*{Lim}_{k\to\infty} x_{n_k} = A)$$

Схема доказательства

$$\begin{array}{c} \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \in \mathbf{N}(n > N \\ \Longrightarrow |x_n - A| < \varepsilon) \Longrightarrow \\ \exists K\ \forall k \in \mathbf{N}(k > K \Longrightarrow \\ n_k > N) \Longrightarrow \exists K\ \forall k \in \mathbf{N} \\ (k > K \Longrightarrow |x_{n_k} - A| < \varepsilon) \end{array} \qquad \begin{array}{c} \underline{\varepsilon > 0}\ \exists N\ \forall n \in \mathbf{N}(n > N \\ \Longrightarrow |x_n - A| < \varepsilon) \Longrightarrow \\ \underline{\exists K}\ \underline{\forall k \in \mathbf{N}}(k > K \Longrightarrow \\ n_k > N) \Longrightarrow \exists K\ \forall k \in \mathbf{N} \\ (\underline{k > K} \Longrightarrow \underline{|x_{n_k} - A| < \varepsilon}) \end{array}$$

Логическая модель (III тип ориентировки ООД) $\xrightarrow[\text{действие (=)}]{\text{управляющее}}$ Наглядное моделирование фоном (выделение существенных связей в плане симультанного восприятия)

Целостность объекта восприятия еще не означает появления в процессе обучения математике целостного субъективного образа в мышлении обучаемого. В самом деле, в курсе математического анализа много логически стройных, адекватных по сложности изучаемому материалу, важных по применимости, задействованных методов исследования (логические модели) и, таким образом, целостных доказательств различных теорем, однако не наглядных по сути существующих приемов и методов обучения. Это подтверждается нашими многолетними наблюдениями за успешностью и адекватностью воспроизведения указанных умений на экзаменах по математическому анализу.

Например, использование структурной наглядности (семантическая сеть) в представлении знаний применительно к доказательству формул Тейлора (см. схему ниже) позволило добиться 70–75% адекватного и осмысленного воспроизведения доказательства в экспериментальной группе с вероятностно гарантированным результатом.

Схема 17

Структурная схема доказательства формулы Тейлора

Логический анализ теоремы может включать: логическую запись формулировки теоремы, формулировки обратной и противоположной теоремы, метод доказательства, блок-схему доказательства, контрпримеры к условиям теоремы с графическими иллюстрациями и т.п.

Основные понятия и теоремы тщательно и всесторонне обсуждаются: проводится структурный анализ по схеме (рис. 18, с. 163).

Мышление человека только тогда можно считать культурным, когда оно совершается в полном соответствии с законами логики. Эти законы устанавливают нормы рассуждений, умозаключений, обеспечивающие получение с их помощью посылок верных заключений. И роль обучения математике через анализ в воспитании логического мышления студентов огромна, в этой дисциплине студенты с наибольшей полнотой, наиболее выпукло и зримо могут увидеть демонстрацию почти всех логических законов. Для того, чтобы умения и навыки студентов были осознанными, и для того, чтобы дать им способ ориентировки в выполнении умственных действий, необходимо включать в содержание обучения математическому анализу систему определенных логико-теоретических знаний. В эту систему входят, например, знания о сущности логических форм и законов (определения, аксиомы, теоремы, логические связки и кванторы, методы доказательств, классификации и т.п.).

Одной из основных логических форм в математическом анализе является доказательство – логическое действие, в процессе которого истинность какого-либо суждения обосновывается с помощью других суждений, признанных истинами. Многовековой опыт убедил людей в том, что обоснованность доказательства – это важное свойство правильного мышления, приводящего к истинному знанию. Логика выделяет во всяком доказательстве 3 основные части: тезис – суждение, истинность которого требуется доказать, довод – суждение, истинность которого доказана или проверена, демонстрацию – логическое рассуждение, в процессе которого из доводов выводится истинность тезисов. По способу ведения доказательства подразделяются на прямые и косвенные: среди косвенных доказательств встречаются раздельные, в которых тезис – есть раздельное суждение, и где число возможных случаев конечно.

Например, в теореме Кантора (всякое множество A имеет мощность строго меньшую мощности $\beta(A)$, где $\beta(A)$ – булеан A) имеем:

а) $\bar{A} < \overline{\beta(A)}$;
б) $\bar{A} > \overline{\beta(A)}$;
в) $\bar{A} = \overline{\beta(A)}$.

Последовательно исключаются все члены разделительного суждения, кроме одного, который требовалось доказать.

По форме умозаключения, в которой совершают доказательства, различают индуктивные и дедуктивные доказательства. Индуктивные доказательства получают в результате применения методов полной индукции и математической индукции. Подавляющее большинство математических предложений доказываются на основе дедуктивных умозаключений. Они представляют собой цепочку дедуктивных силлогизмов. (Силлогизмом называют опосредованное дедуктивное умозаключение, в котором вывод логически получают из двух посылок-суждений, имеющих общий термин. Посылка, содержащая общее правило, называется большой посылкой. В качестве большой посылки силлогизма могут выступать ранее доказанные предложения, теоремы и следствия из теорем и аксиом, а также определения и т.п. Меньшая посылка включает в себя часть условия доказываемой теоремы или следствия, полученные в предшествующих силлогизмах.) Математическое доказательство – это частный случай научного доказательства, обладающий определенной спецификой. Важнейшей его особенностью является строгая логичность и полная достоверность, базирующаяся на использовании только умозаключений достоверности, логических правил строгой выводимости и на точности математических понятий, предложений, операций [125].

Логическая цепочка силлогизмов может строиться на основе анализа и синтеза, поэтому различают синтетические и аналитические доказательства. Доказательство математического предложения $A \Longrightarrow C$ называется синтетическим, если оно осуществляется по логической схеме:

$$(A \wedge T) \Longrightarrow B_1 \Longrightarrow B_2 \Longrightarrow ... \Longrightarrow B_n \Longrightarrow C.$$

Основным достоинством синтетического метода является его лаконичность, поэтому этот метод преобладает при изложении доказательств, однако мало способствует развитию творческого мышления.

При доказательстве математического предложения $A \Longrightarrow C$ аналитическим методом отправляются не от условия, а от заключения C. Для аналитического метода доказательства, называемого восходящим анализом, характерно еще и то, что, отправляясь от заключения, подбирают для него достаточное условие $B_1 \Longrightarrow C$, затем $B_2 : B_2 \Longrightarrow B_1 ... B_n \Longrightarrow B_{n-1}$ и B_n истинно $(B_1 \Longrightarrow C, B_2 \Longrightarrow B_1, ..., B_n \Longrightarrow B_{n-1},\ (A \wedge T) \Longrightarrow B_n)$.

Нисходящий метод может использовать в доказательстве метод “от противного” и в деструктивной роли путем построения контрпримеров.

$$[(\bar{C} \Longrightarrow B_n) \wedge \bar{B}_n] \Longrightarrow \bar{\bar{C}} = C.$$

Существуют такие специфические методы: метод Больцано, метод введения вспомогательной функции и др.

Примеры: (T – совокупность предложений той математической теории, в рамках которой доказывается данное предложение).

Синтетический: $\exists x_0 \in]a;b[(f'(x_0) \in \mathbf{R} \Longrightarrow \Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x))$.

$$\underbrace{f'(x_0) \in \mathbf{R}}_{A} \Longrightarrow \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)}_{B_1} \Longrightarrow \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0)\right] = 0}_{B_2}$$

$$\underbrace{\alpha(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) - ...}_{B_3} \Longrightarrow \underbrace{\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x}_{B_4} \Longrightarrow C.$$

Восходящий анализ: $[\forall n(x_n \leq y_n \leq z_n) \wedge \exists \lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \wedge \exists \lim\limits_{n \to \infty} z_n = a] \Longrightarrow \underbrace{\exists \lim\limits_{n \to \infty} y_n = a}_{C}$.

$C \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n(n > N \Longrightarrow a - \varepsilon \leq y_n \leq a + \varepsilon) \Longleftarrow (\forall n > N)(a - \varepsilon \leq x_n \leq y_n \leq z_n \leq a + \varepsilon)(\forall n > N) \Longleftarrow (a - \varepsilon \leq x_n \leq a + \varepsilon \wedge a - \varepsilon \leq z_n \leq a + \varepsilon) \Longleftarrow (n > N_1 \wedge n > N_2) \Longleftarrow A$.

Нижепредложенный методический прием укрупнения дидактических единиц [261] позволяет оптимизировать структуру нескольких разделов математического анализа.

Теорема о покрытии. Тема “Предел функции” является одной из наиболее сложных в математическом анализе ввиду насыщенности логической информацией и многообразия форм представления основных понятий. Теорема о покрытии позволяет соединить воедино ряд практических задач на нахождение предела функции с классификацией самих пределов.

1. Пусть A – непустое бесконечное подмножество $\mathbf{R}$ и a – предельная точка (собственная или несобственная) множества A такая, что $a \notin A$. Множество A становится направленным, если для $x \in A$ и $x' \in A$ положить:

$$(x' \prec x) \Longleftrightarrow (|x - a| < |x' - a|) \quad (a \in \mathbf{R}),$$
$$(x' \prec x) \Longleftrightarrow (x' < x) \quad (a = +\infty),$$
$$(x' \prec x) \Longleftrightarrow (x' > x) \quad (a = -\infty).$$

Направленное отношением $\prec$ множество A обозначим (A, a) или $(A, +\infty)$, $(A, -\infty)$ в случае несобственной точки a. Множество A в этом случае будем называть допустимым для a. Отметим, что если $a \in \mathbf{R}$ и $|x' - a| = \delta > 0$, то

$$A_{x'} \overset{def}{=} \{x \in A : x' \prec x\} = \{x \in A : |x - a| < \delta\}.$$

В частности, если a – внутренняя точка множества $A \cup \{a\}$, то, начиная с некоторого $\delta > 0$, получим $A_{x'} = \overset{\bullet}{\vee}_{\delta}(a) \cap A$, где $\overset{\bullet}{\vee}_{\delta}(a)$ так называемая проколотая окрестность точки a. В случае несобственной точки $a = +\infty$ и $x' = M$ получим

$$A_{x'} = \{x \in A : x > M\} = A \cap V_M(+\infty),$$

а если $a = -\infty$, то для $x' = -N$

$$A_{x'} = \{x \in A : x < -N\} = A \cap V_N(-\infty).$$

Пусть $D(f)$ – область определения функции $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ и $(A, \prec)$ – направленное множество, определяемое предельной точкой a (собственной или несобственной), такое что $A \subset D(f)$.

Число L (собственное или несобственное) называется пределом функции f по направленному множеству A, если

$$(\forall V(L))(\exists x' \in A)\forall x(x \succ x' \Longrightarrow f(x) \in V(L)).$$

Если L – предел функции f по множеству A, то будем писать $\lim\limits_{A} f(x) = L$ и говорить, что f стремится к L по множеству A. В частности, если направленное множество $(A, \prec)$ будет $(A \ni x \longrightarrow a)$, где $a \in \mathbf{R}$, то

$$(\lim_{A \ni x \to a} f(x) = L) \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall V(L))(\exists \delta > 0)\forall x \in A(|x - a| < \delta \Longrightarrow f(x) \in V(L)).$$

Кроме того, если $L = -\infty$, то $V(L) = \{x \in \mathbf{R} : x < -N\}$ и, например,

$$(\lim_{A \ni x \to +\infty} f(x) = -\infty) \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall N > 0)(\exists M > 0)\forall x \in A(x > M \Longrightarrow f(x) < -N).$$

Примеры предела функции:

а) предел последовательности. Пусть $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R}$ и $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = L$. Тогда положим $A = \mathbf{N}$ так, что $(\mathbf{N}, \leq)$ – элементарный фильтр и $a = +\infty$, так что $+\infty$ – предельная точка для $\mathbf{N}$. Теперь $\lim\limits_{A \ni x \to a} f(x) = L$

есть $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = L$, то есть предел последовательности $(f(n))$ – частный случай предела функции.

б) (ε, δ)-предел. Этот случай имеет место, когда $a \in \mathbf{R}$, $L \in \mathbf{R}$, именно:

$$(\lim_{A\ni x\to a} f(x) = L) \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)\forall x \in A(|x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)-L| < \varepsilon).$$

Покажем, например, что $\lim\limits_{x\to 3} \frac{5x-7}{2x+3} = \frac{8}{9}$; здесь $f(x) = \frac{5x-7}{2x+3}$, $A = D(f) = \mathbf{R} \setminus - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ – проколотое множество, $a = 3$ и $L = \frac{8}{9}$. Тогда

$$\left(\lim_{x\to 3} \frac{5x-7}{2x+3} = \frac{8}{9}\right) \Longleftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)\forall x \in A$$

$$\left(|x-3| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{5x-7}{2x+3} - \frac{8}{9}\right| < \varepsilon\right).$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Оценим модуль $\left|\frac{5x-7}{2x+3} - \frac{8}{9}\right|$, считая, что $2 \le x \le 4$:

$$\left|\frac{5x-7}{2x+3} - \frac{8}{9}\right| = \frac{1}{9}\frac{|29x-87|}{2x+3} = \frac{29}{9}\frac{|x-3|}{2x+3} < 4\frac{|x-3|}{2x+3} \le \frac{4}{7}|x-3| < \varepsilon.$$

Если теперь положить $\delta = \frac{7}{4}\varepsilon$, то как только $|x-3| < \delta$, то $\frac{4}{7}|x-3| < \varepsilon$ и, следовательно, $\left|\frac{5x-7}{2x+3} - \frac{8}{9}\right| < \varepsilon$, что и требовалось установить.

в) пределы на бесконечности. Этот случай имеет место, когда $a = \pm\infty$. Пусть требуется доказать, что $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2-1}{5x^2+4} = \frac{3}{5}$; здесь $f(x) = \frac{3x^2-1}{5x^2+4}$, $A = D(f) = \mathbf{R}$, $a = -\infty$ и $L = \frac{3}{5}$. Тогда

$$\left(\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-1}{5x^2+4} = \frac{3}{5}\right) \Longleftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists N > 0)\forall x \in \mathbf{R}$$

$$\left(x < -N \Longrightarrow \left|\frac{3x^2-1}{5x^2+4} - \frac{3}{5}\right| < \varepsilon\right).$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Оценим модуль $\left|\frac{3x^2-1}{5x^2+4} - \frac{3}{5}\right|$, считая, что

$$\left|\frac{3x^2-1}{5x^2+4} - \frac{3}{5}\right| = \frac{1}{5}\frac{17}{5x^2+4} < \frac{4}{5x^2+4} < \frac{4}{x^2} < \frac{4}{-x} < \varepsilon.$$

Если теперь положить $N = \frac{4}{\varepsilon} > 0$, то

$$\left(x < -\frac{4}{\varepsilon}\right) \Longrightarrow \left(\frac{4}{-x} < \varepsilon\right) \Longrightarrow \left(\left|\frac{3x^2-1}{5x^2+4} - \frac{3}{5}\right| < \varepsilon\right),$$

что и требовалось доказать.

г) бесконечные пределы. Этот случай имеет место, когда $L = \pm\infty$. Пусть требуется доказать, что $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{3}{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2} = +\infty$; здесь $f(x) = \dfrac{3}{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2}$, $A = D(f) = \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ – проколотое множество, $a = \dfrac{1}{2}$ и $L = +\infty$. Тогда

$$\left(\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{3}{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2} = +\infty\right) \Longleftrightarrow (\forall M > 0)(\exists\delta > 0)\forall x \in A$$

$$\left(\left|x - \frac{1}{2}\right| < \delta \Longrightarrow \frac{3}{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2} > M\right).$$

Пусть $M > 0$. Оценим выражение $\dfrac{3}{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2}$, считая, что $0 \le x \le 1$, $x \ne \dfrac{1}{2}$. Если теперь положить $\delta = \dfrac{3}{M} > 0$, то

$$\left(\left|x-\frac{1}{2}\right| < \frac{3}{M}\right) \Longrightarrow \left(\frac{3}{\left|x-\dfrac{1}{2}\right|} > M\right) \Longrightarrow \left(\frac{3}{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2} > M\right),$$

что и требовалось доказать.

д) односторонние пределы. Предел функции $\lim\limits_{A\ni x\to a} f(x) = L$ называется односторонним, если $a = \sup A$ или $a = \inf A$. В частности, односторонними будут пределы $\lim\limits_{A\ni x\to\pm\infty} f(x) = L$. Односторонний предел

$\lim\limits_{x\to\sup A} f(x) = L$ называется пределом функции f в точке $a \in \mathbf{R}$ по множеству A и обозначается:

$$\left(\lim_{x\to\sup A} f(x) = L\right) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \left(\lim_{A\ni x\to a-0} f(x) = L\right).$$

Соответственно, односторонний предел $\lim\limits_{x\to\inf A} f(x) = L$ называется пределом функции f справа в точке $a \in \mathbf{R}$ по множеству A и обозначается:

$$\left(\lim_{x\to\inf A} f(x) = L\right) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \left(\lim_{A\ni x\to a+0} f(x) = L\right).$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ есть предел функции слева, а $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ – предел функции справа. Если $a \in \mathbf{R}$, то вместе с $\lim\limits_{A\ni x\to a} f(x)$ можно рассматривать два односторонних предела $\lim\limits_{A^+\ni x\to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{A^-\ni x\to a-0} f(x)$, где

$$A^+ = \{x \in A : x > a\}, \quad A^- = \{x \in A : x < a\}.$$

2. Пусть a – предельная точка (собственная или несобственная) бесконечного множества $A \subset \mathbf{R}$, направленного транзитивным отношением $\prec$. Если выполнено $a = \sup A$ или $a = \inf A$, то множество A назовем сильно направленным для точки a. Ясно, что односторонние пределы функции есть пределы по сильно направленным множествам.

Теорема о покрытии. *Пусть дано множество* $(A_\alpha)_{\alpha\in S}$ *сильно направленных для точки a множеств такое, что*

а) $A = \bigcup\limits_{\alpha\in S} A_\alpha$ *– направленное множество соотношением* $\prec$*;*

б) для каждого допустимого для точки a множества $A' \subset \mathbf{R}$ *существует* $\alpha_0 \in S$ *такое, что* $A' \cup A_\alpha$ *сильно направлено соотношением* $\prec$.

Пусть функция $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ *такая, что* $a \in D$. *Тогда для существования предела* $\lim\limits_{A\ni x\to a} f(x) = L$ *необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы* $\lim\limits_{A_\alpha\ni x\to a} f(x)$ $(\alpha \in S)$ *и были равны между собой* (L).

Доказательство проведем, например, для случая $a \in \mathbf{R}$ и $L \in \mathbf{R}$.

Необходимость. Пусть существует $\lim\limits_{A\ni x\to a} f(x) = L$ и $A = \bigcup\limits_{\alpha\in S} A_\alpha$, где A_α – сильно направленные множества для точки a $(\alpha \in S)$. Если $\varepsilon > 0$

задано, то найдется $\delta > 0$ такое, что из условия $|x-a| < \delta$ $(x \in A)$ вытекает: $|f(x)-L| < \varepsilon$. Но так как $A_\alpha \subset A$, то $|f(x)-L| < \varepsilon$ выполнено также и для $|x-a| < \delta$ $(x \in A_\alpha)$, где $\alpha \in S$. Последнее означает, что $\lim\limits_{A_\alpha \ni x \to a} f(x) = L$ $(\alpha \in S)$.

Достаточность. Пусть $\lim\limits_{A_\alpha \ni x \to a} f(x) = L$ $(\alpha \in S)$ и $A = \bigcup\limits_{\alpha \in S} A_\alpha$ так, что а) и б) теоремы выполнены. Доказательство достаточности проведем методом от противного. Предположим, что $\lim\limits_{A \ni x \to a} f(x) \neq L$, то есть существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ найдется $x_\delta \in A$ такое, что $|x_\delta - a| < \delta$ и тем не менее $|f(x_\delta) - L| \geq \varepsilon$:

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)\exists x_\delta \in A(|x_\delta - a| < \delta \Longrightarrow |f(x_\delta) - L| \geq \varepsilon).$$

Рассмотрим множество $A' = \{x_\delta \in A : \delta > 0\}$. Тогда множество A' допустимое для точки $a \in \mathbf{R}$ и, следовательно, в силу условия б) теоремы найдется $\alpha_0 \in S$ такое, что $A' \cap A_{\alpha_0}$ сильно направленное множество, то есть, например, $a = \sup(A' \cap A_{\alpha_0})$. Тем самым, для $\delta_n = \dfrac{1}{n} > 0$ в силу характеристического свойства граней найдется последовательность (x_{δ_n}) или просто (x_n) такая, что $x_n \in A_{\alpha_0}$ и $|x_n - a| < \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$. Но так как $\lim\limits_{A_{\alpha_0} \ni x \to a} f(x) = L$, то для указанного ранее $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_0 > 0$ такое, что $|f(x) - L| < \varepsilon$ для всех $x \in A_{\alpha_0}$ и таких, что $|x - a| < \delta_0$. Более того, $|x_n - a| < \dfrac{1}{n} < \delta_0$ для всех $n > N$ и, следовательно, $|f(x_n) - L| < \varepsilon$ $(n > N)$. Однако в силу предположения должно выполняться неравенство $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$, что невозможно. Таким образом, $\lim\limits_{A \ni x \to a} f(x) = L$, что и требовалось доказать.

Следствия теоремы о покрытии:

1. Критерий равенства односторонних пределов. Для того, чтобы существовал предел функции f в точке $a \in \mathbf{R}$ по проколотому множеству A, необходимо и достаточно, чтобы существовали и были равны односторонние пределы функции f:

$$\left(\lim_{A \ni x \to a} f(x) = L\right) \Longleftrightarrow \left(\lim_{A \ni x \to a-0} f(x) = L \wedge \lim_{A \ni x \to a+0} f(x) = L\right).$$

Действительно, достаточно рассмотреть множества A^+ и A^- такие, что $A = A^+ \cup A^-$, и воспользоваться теоремой о покрытии.

2. Характеристическое свойство предела функции. Для того, чтобы существовал предел функции f в точке a (собственной или несобствен-

ной) по множеству A, необходимо и достаточно, чтобы для каждой последовательности (x_n) такой, что $x_n \to a$, $x_n \in A$ $(n \in \mathbf{N})$, сходились последовательности $f(x_n)$.

Действительно, полагая $\alpha = (x_n)$, где $x_n \to a$, $x_n \in A^+$ или $x_n \in A^-$ $(n \in \mathbf{N})$, и $A_\alpha = \Im(x_n)$, получим $A = \bigcup\limits_\alpha \Im(x_n)$. Если теперь A' – допустимое множество для точки a, то в силу секвенциальности $\mathbf{R}$ легко найти $\alpha = (x_n)$ такую, что $\Im(x_n) \subset A'$. Остается воспользоваться теоремой о покрытии.

3. Принцип покрытия для последовательностей. Пусть $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R}$ – последовательность и $f|_{A_1}, f|_{A_2}, ..., f|_{A_m}$ – подпоследовательности такие, что $\bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i \supset \{n \in \mathbf{N} : n > p\}$. Тогда для того, чтобы последовательность f сходилась, необходимо и достаточно, чтобы сходились последовательности $f|_{A_i}$ $(i = 1, 2, ..., m)$ и имели один и тот же предел.

Доказательство сразу следует из теоремы о покрытии, если положить $A = \mathbf{N}$ и $S = \{1, 2, ..., m\}$. Однако с дидактической точки зрения представляет интерес и непосредственное доказательство следствия 3. Проведем его.

Необходимость. Пусть $f(n) = x_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $f|_{A_1}(n) = x_{n_k^1}$, $f|_{A_2}(n) = x_{n_k^2}, ..., f|_{A_m}(n) = x_{n_k^m}$ – подпоследовательности (x_n). Тогда в силу свойства подпоследовательности получим $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k^1} = a$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k^2} = a, ..., \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k^m} = a$.

Достаточность. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k^i} = a$ для всех $i = 1, 2, ..., m$, причем $\bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i \supset \{n \in \mathbf{N} : n > p\}$, где p – некоторое фиксированное натуральное число и $A_i = \{n_1^i, n_2^i, ..., n_k^i, ...\}$ – бесконечное подмножество $\mathbf{N}$, определяющее подпоследовательность $(x_{n_k^i})$ $(i = 1, 2, ..., m)$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Действительно, пусть $\varepsilon > 0$. Тогда найдутся номера $k_i \in \mathbf{N}$ такие, что для всех $k > k_i$ выполнены неравенства $|x_{n_k^i} - a| < \varepsilon$ $(i = 1, 2, ..., m)$. Если теперь положить $N = \max\{p, n_{k_1}^1, n_{k_2}^2, ..., n_{k_m}^m\}$, то для $n_k^i > N$ $(i = 1, 2, ..., m,\ k > \max\{k_1, k_2, ..., k_m\})$ все последние неравенства выполнены одновременно, причем если $n > N$, то $n > p$ и, следовательно, существуют i и k такие, что $n = n_k^i$. Таким образом, $|x_n - a| = |x_{n_k^i}| < \varepsilon$ для всех $n > N$, что и требовалось доказать.

Принцип покрытия для последовательностей можно применить по крайней мере в трех ситуациях. Во-первых, пусть требуется найти

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$; здесь $x_n = \dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$. Пусть $x_{2k} = \dfrac{(-2)^{2k}+3^{2k}}{(-2)^{2k+1}+3^{2k+1}}$ и $x_{2k-1} = \dfrac{(-2)^{2k-1}+3^{2k-1}}{(-2)^{2k}+3^{2k}}$ $(k \in \mathbf{N})$. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = \lim_{k\to\infty}\frac{4^k+9^k}{-\frac{1}{2}4^k+3\cdot 9^k} = \lim_{k\to\infty}\frac{1+\left(\frac{4}{9}\right)^k}{3-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}\right)^k} = \frac{1}{3},$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = \lim_{k\to\infty}\frac{-\frac{1}{2}4^k+\frac{1}{3}9^k}{4^k+9^k} = \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}\right)^k}{1+\left(\frac{4}{9}\right)^k} = \frac{1}{3}.$$

Полагая $A_1 = \{2, 4, 6, ..., 2k, ...\}$ и $A_2 = \{1, 3, 5, ..., 2k-1, ...\}$, получим $\mathbf{N} = A_1 \cup A_2$ и, следовательно, в силу принципа покрытия существует предел последовательности (x_n), равный $\frac{1}{3}$, то есть

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}} = \frac{1}{3}.$$

Во-вторых, принцип покрытия применим для нахождения всех пределов подпоследовательностей (x_n). Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k^1} = a_1$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k^2} = a_2, ...,$ $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k^m} = a_m$, $\bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i \supset \{n \in \mathbf{N} : n > p\}$ и $(x_{n_k^*})$ – некоторая сходящаяся подпоследовательность (x_n) такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k^*} = a$ и $A = \{n_1^*, n_2^*, ..., n_k^*, ...\}$. Тогда найдется номер $i \in \{1, 2, ..., m\}$ такой, что множество $A \cap A_i = \{n_1^*, n_2^*, ..., n_k^*, ...\}$ бесконечное и, следовательно, в силу принципа покрытия $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k^{i*}} = a$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k^{i*}} = a_i$ так, что $a = a_i$. Другими словами, при сформулированных условиях пределы подпоследовательностей (x_n) могут быть лишь $a_1, ..., a_m$.

В-третьих, принцип покрытия можно применить для доказательства несуществования предела последовательности. В самом деле, пусть для последовательности (x_n) нашлись две подпоследовательности (x_{n_k}) и $(x_{n'_k})$ такие, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a_1$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n'_k} = a_2$ и $a_1 \neq a_2$. Тогда, если предположить, что существует $\lim\limits_{k\to\infty} x_n = a$, то в силу принципа покрытия получим $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n'_k} = a$, что невозможно. Значит, последовательность (x_n) не имеет предела. Например, для последовательности $x_n = \sin n\frac{\pi}{2})$ такими подпоследовательностями будут $(x_{4k-1} = -1)$ и $(x_{4k-3} = 1)$, так что последовательность $\sin n\frac{\pi}{2})$ расходящаяся.

Приведенные выше приемы моделирования учебной деятельности способствуют профессионализации процесса обучения и выработке потребности и навыков в планировании, постановке стратегических и тактических целей в изучении разделов математического анализа.

Методика работы в малых группах

В процессе формирования приемов учебной деятельности в различных формах коммуникации (лекции, практические и лабораторные занятия, оценивание, компьютерный контроль, деловые игры, самостоятельная работа и т.д.) у группы студентов стихийно выделяются неформальные лидеры. Эти студенты обладают чуть большими по сравнению с окружающими способностями к восприятию нового учебного материала, чуть более обширными общеучебными навыками и коммуникативными качествами, чуть более высоким интеллектуальным потенциалом. Опыт преподавания показывает, что вокруг лидера формируется коллектив (малая группа в 3–4 человека, иногда 2 студента), который стихийно вырабатывает общие унифицированные приемы поведения, организует эффективный обмен идеями и образцами деятельности, оптимизирует вклад каждого члена в достижение учебных целей. Эта “фракционная” деятельность студентов постоянно входит в противоречие с традиционными методами контроля, организации творческой деятельности и самостоятельной работы.

Здесь предлагается методика эффективного использования потенциала малых групп для более качественного усвоения знаний, формирования творческой активности студентов, развития профессионально важных качеств личности будущего учителя математики:

1. По прошествии небольшого числа (6–8) практических занятий на I курсе (процесс формирования коллектива) преподаватель определяет 6–7 малых групп (по итогам наблюдения) по 2–4 студента, достаточно подвижных по своему составу, и фиксирует ситуацию, объявляя состав малых групп и установку на дальнейшую совместную деятельность.

2. График учебного процесса и виды учебной деятельности (самостоятельные контрольные работы на 10–15 минут, творческие задания, домашние контрольные работы, контроль в дисплейном классе, лабораторные занятия и т.п.) планируются *a priori* с дифференциацией и вариативностью на 7 блоков с общей ответственностью и результатом в малой группе. Эта методика не касается проведения текущих контрольных работ (2-х часовых) и зачетно-экзаменационных мероприятий, которые ориентированы на индивидуальную ответственность студента.

3. Практическое занятие проводится по следующей схеме (ПК – практические занятие):

Рис. 36. Фрейм практического занятия

Таким образом, если в традиционной методике проведения практического занятия большая часть учебного времени отводится на показ образцов решения задач по теме, то в нашей методике студент по объявленной теме и минимальным образцам решения большую часть времени проводит за самостоятельным решением достаточного количества задач, в том числе творческого характера. На занятие он приходит с проблемами, ошибками и нерешенными заданиями; преподаватель, выяснив ситуацию с домашней работой, разбирает решения наиболее типичных задач, акцентирует внимание на ошибках, показывает приемы творческого подхода к решению заданий.

Происходит “опережающее отражение” в формировании практических умений в решении математических задач: получив минимальные образцы деятельности, студент самостоятельно (или в малой группе) определяет методы решения, сталкивается с проблемами содержательного, субъективного, временного характера.

Самостоятельные контрольные работы (10–15 минут) создают деятельностный фон непрерывного хранения базовой информации и фиксируют состояние остаточной базы знаний предыдущего семестра. Балльно-рейтинговая система оценивания стимулирует ответственное отношение к учебной деятельности.

4. В формировании мотивационной сферы обучения математике немаловажную роль играет проявление познавательного интереса у студентов путем развертывания генезиса математических идей в историческом аспекте. Работа в малых группах дает возможность, в частности, оптимизировать число разрабатываемых исторических тем, равно как и целостность раскрытия сущности математического факта. Например, семестровые рефераты, отражающие историю становления математических понятий в содержательном, прикладном, хронологическом аспектах, создают основу для обсуждения на коллоквиумах, научных конференциях, стимулируют развитие творческой активности студентов, умение работать с научной и художественной литературой.

3.4.3. Блок результативности обучения

Результативность обучения математике при условии диагностируемого целеполагания и определенной системы измерителей качества усвоения учебного материала выявляется организацией различных средств контроля и обратной связи (теоретический, прикладной, деятельностный, гуманитарный, творческий модули), каждый из которых имеет свою специфику и качественные отличия.

Система оценивания. Активное овладение методами и технологиями усвоения знаний (в том числе на творческом уровне) является профессиональной необходимостью для будущего учителя математики. Поэтому процесс обучения математике в вузе организуется таким образом, чтобы, в частности, студент, самостоятельно работая с учебным материалом, получил образцы (ООУД) деятельности, способствующие как усвоению знания, так и формированию ориентировочной основы для будущей профессиональной деятельности.

Воспользуемся **балльно-рейтинговой** системой оценивания для составления графика учебного процесса.

Таблица 15

Формы учебной работы и шкала оценивания*

---

* Учебный элемент “Математический анализ”, I семестр

Студенты, качественно и в срок выполняющие домашние задания, освобождаются от текущей самостоятельной работы с максимальной оценкой.

Для получения оценки "зачтено" по итогам работы в семестре необходимо достичь суммы баллов не ниже 37 по всем формам учебной деятельности. Достигшие максимальной суммы баллов (более 50) получают особый статус экзаменационного оценивания. График учебного процесса представлен на следующей схеме.

Таблица 16

График учебного процесса

*) Устанавливаются еженедельные консультации по всем видам и формам учебной деятельности

Рассмотрим, например, систему контроля практических умений по теме "Интегральное исчисление". Используем фреймовое представление знаний. Фрейм контроля состоит из следующих слотов:

Схема 18

Фрейм контроля практических умений по теме "Интегральное исчисление"

3.4.4. Учебно-методическое обеспечение дисциплины

Рекомендуемая литература

а) основная литература:

1. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1, 2, 3. М.: Наука, 2001.

2. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.

3. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

4. *Маркушевич А. И., Маркушевич Л. А.* Введение в теорию аналитических функций. М.: Просвещение, 1977.

5. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1982.

6. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1969.

7. *Шмелев П. И.* Теория рядов. М.: Наука, 1978.

8. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 2. М.: Наука, 1970.

б) дополнительная литература:

1. *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ. Т. 1, 2. М.: Высшая школа, 1973.

2. *Уваренков И. М., Маллер М. З.* Курс математического анализа. Т. 1, 2. М.: Просвещение, 1976.

3. *Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д. и др.* Сборник задач по математическому анализу. М.: Наука, 1984.

4. *Маркушевич А. И., Маркушевич Л. А.* Введение в теорию аналитических функций. М.: Просвещение, 1977.

5. *Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л.* Интеграл, мера и производная. Общая теория. М.: Наука, 1967.

6. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1977.

7. *Евграфов М. А.* Сборник задач по теории аналитических функций. М.: Наука, 1972.

8. *Вулих Б. З.* Краткий курс теории функций вещественной переменной. М.: Наука, 1970.

Средства обеспечения освоения дисциплины

Автоматизированность и оптимальность управления контролирующей деятельностью достигается применением **педагогических программных продуктов**. Ниже приведены дидактические материалы контроля умений с использованием компьютера.

Система контролирующих программ (4 программы по темам: предел (Lim), производная (Dif), интеграл (Int), ряды (Sum) для персонального компьютера предназначена для текущего контроля базовых умений и навыков по математическому анализу и служит целям:

а) непосредственного контроля и получения обратной связи;

б) стабилизации остаточных фреймов основных умений и навыков;

в) систематизации и спорности изучаемого материала;

г) овладения межпредметными информационными связями.

Данная система контроля отличается от обычного контроля большей наглядностью и объективностью оценки, большей самостоятельностью при выполнении заданий, большей эффективностью оперативного контроля, возможностью вызова правильного ответа после выполнения задания.

Каждая программа содержит банк задач трех уровней, а также тренажер, которым студент может воспользоваться при изучении определенного раздела математического анализа (предел функции, дифференцирование, интегрирование, ряды). Банк задач первого уровня содержит задачи, при решении которых применяется не более одного из изучаемых методов и не требуется сложных вычислений. Для решения задач второго уровня приходится комбинировать известные методы, проводить более сложные преобразования. Задачами третьего уровня являются задачи повышенной трудности. Наличие банка задач трех уровней дает возможность дифференцированного обучения студентов, а также использования настоящего пакета программ на различных уровнях обучения.

Банк задач каждого уровня состоит из 50 заданий 5 основных типов, отражающих основные (базовые) умения и навыки данного раздела математического анализа. Время выполнения каждого из 5 заданий, получаемых случайным выбором, фиксируется таймером с накоплением временного интервала, влияющего на итоговую оценку. Время, отводящееся для решения каждой задачи, погрешность при вводе числового ответа, критерии оценки, равно как и сам банк заданий, могут быть приведены в соответствие с требованиями преподавателя, проводящего текущий контроль.

Целевая установка контроля:

а) информационно-межпредметные связи: знакомство с клавиатурой, графические и функциональные возможности ЭВМ, адекватное восприятие знаково-символических форм, отражающих конкретное математическое содержание, мотивация обучения;

б) оперативность контроля: академическая группа из 25 студентов проходит контроль в дисплейном классе (12 мониторов) в течение 30–40 мин. (Dif, Lim) и 100–120 мин. (Int, Sum) при непосредственном восприятии преподавателем результатов контроля (как количественных, так и качественных – число решенных заданий, количество ошибок в каждом задании, просрочка времени по каждому заданию, общее затраченное на решение заданий время, общее количество ошибок, оценка). Соответственно, в двух дисплейных классах время на проведение контроля уменьшается в 2 раза;

в) система контролирующих программ позволяет создать ассоциативно-рефлекторный фон опорных навыков и умений по курсу математического анализа. Схема внедрения контролирующих программ приведена ниже;

г) стабилизация остаточных фреймов – повторное включение машинного контроля в учебный процесс стимулирует самостоятельную подготовку студентов к изучению новых разделов математического анализа (например, при изучении частных производных и действий над ними требуются навыки дифференцирования функций одного переменного, а точнее – восстановление следов предыдущих знаний (фреймов), что достигается повторным включением контролирующей программы (Dif));

д) мобильность контроля – возможность изменять банк заданий, исходя из особенностей преподавания и методических концепций, возможность менять уровень требований к оценке контроля, возможность менять погрешность при вводе ответа, возможность менять временные интервалы, фиксирующие среднее время, необходимое для выполнения отдельного задания.

Схема 19

Схема внедрения системы контролирующих программ по математическому анализу

Примечание. Программа (Int) для ввода ответа предполагает использование микрокалькулятора.

Лабораторный практикум с использованием малых форм информатизации (в том числе графических калькуляторов) предназначен для оперативного управления формированием и стабилизацией практических умений конкретизации базовых понятий, теорем и процедур.

Перечень примерных контрольных вопросов и заданий для самостоятельной работы:

1. Какие связи между параметрической, полярной и декартовой системой координат?

2. Верна ли обратная теорема к теореме Ферма?

3. Привести пример непрерывной функции, имеющей бесконечное число точек несуществования производной на конечном отрезке.

4. Дать геометрическую иллюстрацию теоремы Коши.

5. Какие условия необходимы и достаточны для строгого монотонного возрастания (убывания) дифференцируемой функции?

6. Как построить непрерывную кривую, сплошь заполняющую квадрат $[0, 1; 0, 1]$ на плоскости $\mathbf{R}^2$?

7. Доказать бесконечную дифференцируемость в точке функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

8. Вывести формулу для $(f_1 : f_2 : ... : f_n)'$.

9. Указать элементарные функции, для которых константа в формуле конечных приращений может быть конструктивно определена.

10. Рассмотреть пример функции и ее критической точки, когда неприменимы все 3 достаточных условия существования экстремума.

11. Доказать теорему: для того, чтобы непрерывная на **R** функция была выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

12. Привести примеры функций, не интегрируемых в элементарных функциях.

13. Можно ли определить интеграл от неограниченной функции? на неограниченном промежутке?

14. Привести пример ограниченной неинтегрируемой по Риману функции.

15. Следует ли из интегрируемости $|f|$ интегрируемость f?

16. Найти связь между формулой Тейлора и формулой Лагранжа.

17.Найти связь между интегральной теоремой о среднем и дифференциальной теоремой о среднем (формула Лагранжа).

18. Каков геометрический смысл дифференциала дуги ds?

19. Доказать теорему о необходимом и достаточном условии интегрируемости ограниченной функции по Риману.

20. Вычислить объем эллипсоида (и, следовательно, шара), конуса, пирамиды; площадь круга (эллипса) и задачи подобного рода, относящиеся к школьной математике.

Примерная тематика рефератов и курсовых работ: рефераты (I, II семестры)

Цель: расширение когнитивного опыта в условиях индивидуальной и совместной деятельности принятия решения: сбор данных, выбор, активация мотивационной сферы.

Задачи: углубленное изучение и представление в форме исторического реферата фрагмента курса математического анализа: персоналии, вариативность подходов к проблеме, проработка деталей информационного поля проблемы, расширение банка учебных и творческих заданий, прикладные задачи и использование вычислительных методов и т.п.; осуществление “обучения через выбор”; формирование творческой активности и коммуникативных качеств.

Формы: работа в малых группах (3–4 студента), индивидуальные консультации.

I семестр

1. *Построение графиков функций в полярной системе координат*

1. *Вирченко Н. А., Ляшко И. И., Швецов К. И.* Графики функций: Справочник. Киев: Наук. думка, 1979.
2. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Наука, 2001.

2. *Десять исторических задач, приводящих к понятию производной*

1. *Юшкевич А. П.* Концепции вычисления бесконечно малых Ньютона и Лейбница // ИМИ. Вып. 23. 1978.
2. *Стройк Д. Я.* Краткий очерк истории математики. М.: Мир, 1978.

3. *Функциональные уравнения основных элементарных функций*

1. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Наука, 2001.
2. *Одинец В. П., Поволоцкий А. И.* Построение элементарных функций. СПб.: Образование, 1995.

4. *Основные элементарные функции в природе и технике*

1. *Виленкин Н. Я.* Функции в природе и технике. Книга для внеклассного чтения IX–X классов. М.: Просвещение, 1978.
2. *Крейн С. Г., Ушаков В. Н.* Математический анализ элементарных функций. М.: Наука, 1966.
3. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 1. М.–Л., 1987.

5. *Системы координат на плоскости и в пространстве*

1. *Понтрягин Л. С.* Метод координат. М.: Наука, 1977.
2. *Выготский М. Я.* Справочник по высшей математике. М.: Наука, 1973.
3. *Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Кириллов А. А.* Метод координат. М., 1973.

6. *Трансцендентные числа в анализе*

1. *Зорич В. А.* Математический анализ. Т. 1. М.: Наука, 1983.
2. *Рудно Ф.* Квадратура круга. М.–Л., 1934.
3. *Гельфонд А. О.* Решение уравнений в целых числах. М.–Л., 1952.
4. *Хинчин А. Я.* Три жемчужины теории чисел. М., 1979.

7. *Цепные дроби и их приложения*

1. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. М.: Наука, 1978.
2. *Андронов И. К., Окунев А. К.* Арифметика рациональных чисел. М.: Просвещение, 1971.

II семестр

Цель: освоение навыков исследовательской деятельности: включенность в математическую проблему, генезис идей и вариативность подходов, сбор данных и перенос знаний, выделение базовых, значимых компонентов проблемы, готовность к принятию нестандартных решений.

Задачи: инновационное самостоятельное решение конкретных математических задач и проблем: новые банки задач и примеров, новые доказательства известных теорем, поиск новых процедур и алгоритмов, интегративные подходы и структурирование математической информации, визуализация математических объектов и т.п.; осуществление совместной творческой деятельности, обмен информацией и распределением ролей в функционировании малых групп, развитие речевой культуры и коммуникативных качеств, наращивание интеллектуального опыта.

Формы: работа в малых группах (3–4 студента), индивидуальные консультации, публичные защиты рефератов-исследований.

1. *Контрпримеры в теории множеств*

1. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967.
2. *Куратовский К.* Теория множеств. М.: Мир, 1970.
3. *Коэн П.* Теория множеств и континуум-гипотеза. М.: Мир, 1969.

2. *Методы построения графиков функций в параметрических координатах*

1. *Вирченко Н. А., Ляшко И. И., Швецов К. И.* Графики функций: Справочник. Киев: Наук. думка, 1979.
2. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1969.

3. *Контрпримеры в теории функциональных рядов*

1. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967.
2. *Шмелев П. И.* Теория рядов. М.: Наука, 1978.
3. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Наука, 2001.

4. *Особые решения дифференциальных уравнений первого порядка*

1. *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1967.
2. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 2. М.: Наука, 1970.

5. *Ортогональные системы функций в анализе*

1. *Алексич Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов. М.: Иностранная литература, 1963.
2. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.

Спирали фундирования (III–IV семестры)

Цель: построение дидактического фрейма спирали фундирования базового учебного элемента (понятия, теоремы, алгоритма, процедуры).

Задачи: освоение структуры и состава дидактического фрейма учебного элемента, мотивационное оснащение блоков спирали фундирования учебного элемента, выделение существенной связи теоретического (эмпирического) обобщения, структурный анализ сфер деятельности (вербальной, знаково-символической, графической, конкретно-деятельностной) с блоками спирали фундирования.

Формы: работа в малых группах (3–4 студента), индивидуальные консультации, обмен информацией между малыми группами, анализ и публичная оценка.

Лабораторный практикум

№ п/п	№ раздела учеб. предм.	Наименование лабораторной работы
1	1	1. Компьютерный контроль (Lim) по теме “Предел функции” (2 часа) 2. Нахождение корней трансцендентных уравнений (графический калькулятор) (2 часа)
2	2	1. Компьютерный контроль (Dif) по теме “Производная” (2 часа)

		2. Нахождение $\min \mathrm{N}(\varepsilon)$ для числовой последовательности x_n (педагогический программный продукт) (2 часа) 3. Нахождение корней многочлена методом хорд (графический калькулятор) (2 часа)
3	3	1. Компьютерный контроль (Int) по теме "Интеграл" (2 часа) 2. Нахождение значений определенного интеграла методом трапеций (графический калькулятор) (2 часа)
4	4	1. Градиентные методы нахождения экстремума (2 часа) 2. Метод последовательных приближений в $\mathbf{R}^n$ (2 часа) 3. Численное интегрирование в $\mathbf{R}^n$ (2 часа)
5	5	1. Компьютерный контроль (Sum) по теме "Ряды" (2 часа) 2. Распознавание типа дифференциального уравнения (педагогический программный продукт) (1 час) 3. Численное решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ методом Рунге-Кутта (графический калькулятор) (2 часа)
6	6	1. Решение уравнения Фредгольма (2 часа) 2. Геометрия конформных отображений (2 часа)

Курсовая работа (V–VI семестры)

Цель: расширение научного кругозора, формирование навыков самостоятельного научного исследования, решение конкретных задач и проблем математики.

Задачи: построение альтернативных конструкций доказательств известных теорем, решение проблем визуализации сложных математических объектов, теоретический и практический анализ особенностей и частных проявлений математических знаний.

Формы: выполнение индивидуально или в паре (1–2 человека), индивидуальные консультации с научным руководителем, публичная защита на кафедре.

Цепочки задач учебно- и научно-исследовательского характера

Активному овладению курсом математического анализа, развитию творческой самостоятельности студентов, более глубокому проникновению в качественный анализ основных понятий, методов и теорем математического анализа могут служить приводимые ниже цепочки задач учебно- и научно-исследовательского характера, имеющие непосредственный выход на серьезное математическое исследование. Решение этих задач требует самостоятельных математических рассуждений, ознакомления и проработки научно-методической литературы, умения обрабатывать научную информацию, делать самостоятельные выводы. Каждый цикл представляет собой логическую цепочку заданий, связанную единой опорной идеей, с постепенным накоплением информации о реализации этой идеи. Завершающие задачи цикла могут стать основой курсовых и дипломных работ.

Метод последовательных приближений

1. Доказать, что последовательность, задаваемая рекуррентным соотношением: $x_0 = 1$, $x_n = \frac{1}{3}x_{n-1}$, сходится.

2. Найти пределы последовательностей:

а) $x_n = \frac{n^k}{a^n}$, $\quad k \in \mathbf{N}$, $a > 1$; б) $x_n = \frac{a^n}{n!}$.

3. Пусть X – n- мерное пространство, в котором расстояние определяется по формуле

$$\rho(x, y) = \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i|,$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$.

Пусть отображение $A : X \longrightarrow Y$ задается системой линейных уравнений

$$y_i = (Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

При каких условиях отображение A будет сжимающим, т.е.

$$\rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y),$$

где

$$\alpha \in (0, 1), \quad x, y \in X.$$

4. При каких значениях параметра λ оператор $F : C \longrightarrow C$, задаваемый формулой

$$F(f)(x) = \lambda \int\limits_a^b \sin(x-y)f(y)dy + \cos x,$$

будет сжимающим? Методом последовательных приближений найти решение уравнения $F(f) = f$.

5. Составить блок-схему, определить метод вычислений и программу на алгоритмическом языке для задачи 4. Обеспечить эффективную оценку погрешности и практически обеспечить заданную точность.

Литература

1. *Бобков В. В., Городецкий Л. М.* Избранные численные методы решения на ЭВМ инженерных и научных задач. Минск: Вышейша школа, 1985.

2. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.

3. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Наука, 1969.

Компактность

1. Будут ли следующие множества ограничены:
а) $\{\sin n\}_{n\in\mathbf{N}}$, б) $\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}_{n\in\mathbf{N}}$, в) $\left\{\frac{n!}{2^n}\right\}$.

2. Будут ли семейства функций равномерно ограниченными:
а) $\{f_\alpha(x) = \sin\alpha x,\ \alpha\in\mathbf{R},\ x\in\mathbf{R}\}$; б) $\{f_\alpha(x) = e^{\alpha x},\ \alpha\in\mathbf{R},\ x\in[0,1]\}$;
в) $\{f_\alpha(x) = e^{\alpha x},\ \alpha\in[-1,1],\ x\in[0,1]\}$.

3. Будут ли следующие функции непрерывны, на каких множествах:
а) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; б) $f(x) = \operatorname{arcctg}\left(\cos\frac{x}{2}\right)$; в) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1}, & x\neq 1 \\ 4, & x=1. \end{cases}$

4. Исследовать функции на равномерную непрерывность. Результат обосновать на языке (ε, δ).
а) $f(x) = \sqrt{x}$, $(0\le x\le 1)$; б) $f(x) = e^x\cos\frac{1}{x}$, $(0 < x < 1)$;
в) $f(x) = x\sin x$, $(x\ge 0)$.

5. Пусть $F = \{f_1, f_2, ..., f_n, ...\}$ – некоторое семейство функций. Будет ли F равностепенно непрерывным, если:

а) F состоит из конечного числа равномерно непрерывных функций;

б) $F = \{x, x^{1/2}, x^{1/3}, ..., x^{1/n}, ...\}$.

6. С помощью теоремы Арцела определить, являются ли следующие множества функций предкомпактными в равномерной метрике (по max):

а) $\left\{\cos\frac{1}{\alpha}t, \quad 0 \le t \le 2\pi\right\}_{\alpha\in\mathbf{R}}$; б) $\left\{e^{\alpha t}, \quad 0 \le t \le 1\right\}_{\alpha\in[0,1]}$.

Литература

1. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.

2. *Макаров И. П.* Дополнительные главы математического анализа. М.: Просвещение, 1966.

Последовательность

1. Пусть $\{x_n\}$ ограниченная последовательность. Следует ли отсюда ее сходимость?

2. Пусть дано бесконечное число последовательностей:

$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_n^{(1)}, ...$ – I последовательность,

$x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ..., x_n^{(2)}, ...$ – II последовательность,

....

$x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}, ...$ – k последовательность.

Известно, что для любого $k \in \mathbf{N}$ последовательность $\left\{x_i^{(k)}\right\}_{i=1}^{\infty}$ сходится к нулю и для любого $n \in \mathbf{N}$ последовательность $(x_n^{(j)})_{j=1}^{\infty}$ сходится к нулю. Что можно сказать о сходимости "диагональной" последовательности $(x_i^{(i)})_{i=1}^{\infty}$?

3. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ – какой-нибудь базис пространства $\mathbf{R}^n$, тогда любой элемент последовательности $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ может быть представлен в виде:

$$x_k = \sum_{j=1}^{n} \xi_{jk} e_j \quad (k = 1, 2, ...). \tag{$*$}$$

Доказать: для того, чтобы последовательность $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ сходилась к вектору $x = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j e_j$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{k\to\infty} \xi_{jk} = \xi_j \quad (j = \overline{1, n}).$$

4. Доказать: если все сходящиеся подпоследовательности некоторой ограниченной последовательности $(*)$ имеют один и тот же предел, то и сама последовательность сходится к этому пределу.

5. Пусть f непрерывная функция на отрезке $[-\pi, \pi]$ и S_n $(n = 1, 2, ...)$ частичные суммы ряда Фурье функции f. Пусть далее $\lambda_{i,n} > 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_{i,n} = 1$ $(n \in \mathbf{N})$, $\lim\limits_{n\to\infty} \{\max\limits_{i} \lambda_{i,n}\} = 0$. Доказать, что последовательность функций $\{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_{in} S_i\}$ сходится равномерно к функции f на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Литература

1. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. III. М.: Наука, 1969.

2. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.

Выпуклость

1. Описать все замкнутые, выпуклые множества на прямой.

2. Пусть F_α – произвольное семейство замкнутых, выпуклых множеств на прямой. Доказать: если любые два множества семейства F_α пересекаются по непустому множеству, то все множества имеют общую точку.

3. Пусть M – замкнутое выпуклое множество на плоскости. Если M – ограниченное множество, всегда ли проекция M на одну из координатных осей является выпуклым замкнутым множеством? Провести доказательство. Те же вопросы для неограниченного множества M.

4. Пусть F_α – произвольное семейство замкнутых, ограниченных, выпуклых множеств на плоскости. Используя задачу 2, показать, что если любые четыре множества из F_α имеют общую точку, то и все множества имеют общую точку.

Указание. Рассмотреть проекции на одну из координатных осей попарных пересечений множеств из F_α.

5. Если пересечение любых трех из k $(k \geq 4)$ ограниченных замкнутых выпуклых множеств на плоскости не пусто, то и пересечение всех k множеств также не пусто (теорема Хелли).

6. Доказать теорему Каратеодори: всякое выпуклое подмножество $M = co\,N$ из $\mathbf{R}^n$ может быть представлено как выпуклая оболочка не более чем $n + 1$ точек из N.

Литература

1. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1976.
2. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.

Приближение

1. Найти точные нижние и верхние грани следующих множеств:

а) $\left\{\dfrac{n^4}{n^4+1}\right\}_{n\in\mathbf{N}}$; б) $\left\{\dfrac{n+1}{n^3+7}\right\}_{n\in\mathbf{N}}$; в) $\left\{[(-1)^n+1]n+\dfrac{(-1)^n-1}{n^2}\right\}_{n\in\mathbf{N}}$.

Пусть A – некоторое подмножество метрического пространства X. Через $\rho(x,y)$ будем обозначать расстояние между элементами $x\in X$ и $y\in X$. Наилучшим приближением элемента $x\in X$ элементами множества A называется число

$$e(x;A)=\inf_{a\in A}\rho(x,a).$$

Элемент a_0, на котором достигается точная нижняя грань, называется элементом наилучшего приближения.

Геометрически наилучшее приближение элемента x есть расстояние от x до множества A, а элемент наилучшего приближения – точка $a_0\in A$, ближайшая к X.

2. Пусть A – множество рациональных чисел из $[0,1]$, x – иррациональное число, принадлежащее этому отрезку. Найти наилучшее приближение $e(x,A)$.

3. Пусть $A=\{a\in\mathbf{R}^2 : 2a_1+3a_2=0\}$ – прямая на плоскости. Найти наилучшее приближение для точки $x=(1,2)$ элементами множества A в пространстве $X=\{x=(x_1,x_2);\rho(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$. Найти элемент наилучшего приближения; будет ли он единственным?

4. Найти $e(x;A)$ и элемент наилучшего приближения, используя три способа измерения расстояний на плоскости:

а) $\rho_1(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$;
б) $\rho_2(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$;
в) $\rho_3(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$;

если $x=(x_1,x_2)$, $A=\{a=(a_1,a_2) : a_1c_1+a_2c_2=0\}$, здесь c_1,c_2 – произвольные действительные числа.

Литература

1. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
2. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

Числовые ряды и вероятность

1. Докажите, что

а) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...=1;$

б) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+...=\frac{1}{4}.$

2. Найдите сумму ряда: $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+...+\frac{n}{(n+1)!}+...$

3. а) Классический, вероятностный и геометрический способы суммирования геометрической прогрессии.

б) При последовательном вычислении с возвратом из полного набора домино первый поставил на нечетную сумму, а второй на четную. В каком соотношении находятся их шансы на победу?

4. Покажите геометрическим и вероятностным способами, что

а) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}+...=\frac{1}{18};$

б) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+...+\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}+...=\frac{1}{3}.$

5. Найдите вероятностным и геометрическим способами суммы следующих рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{(n+3)!}$; б) $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{7}+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{7}{10}+...+\frac{3^{n-1}\cdot(3n-2)}{4\cdot 7\cdot ...\cdot(3n+1)}+...$

Литература

1. *Афанасьев В. В.* Формирование творческой активности студентов в процессе решения математических задач. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 1996.

2. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Наука, 2000.

3. *Афанасьев В. В., Суворова М. А.* Школьникам о вероятности в играх. Ярославль: Академия развития, 2006. 192 с.

Примерный перечень вопросов к экзамену (интегративные учебные элементы)

1. Мощность множества. Шкала мощностей (упорядочение, неограниченность сверху, линейность). Счетные множества. Несчетность континуума.

Построение шкалы мощностей с помощью факторизации по отношению эквивалентности. Теорема Кантора-Бернштейна. Несчетность интервала и всей прямой. Теорема Кантора о высших мощностях. Счетность множества рациональных чисел. Мощности множеств **N**, **Z**, **R**, **A**, **I**, **T**.

2. Аксиоматическое построение множества действительных чисел. Три теории действительных чисел.

Основные группы аксиом: сложение, умножение, порядок, связи, аксиома непрерывности. Лемма Кантора о вложенных отрезках. Натуральные числа, метод математической индукции. Подклассы **R** (натуральные **N**, целые **Z**, рациональные **Q**, иррациональные **I**, алгебраические **A**, трансцендентные числа), их мощности. Теории действительных чисел Г. Кантора, Р. Дедекинда, К. Вейерштрасса (исторический анализ, различие и взаимосвязи).

3. Принцип Архимеда. Позиционные системы счисления. Двоичная система счисления и ЭВМ.

Формулировка и геометрическая трактовка принципа Архимеда. Приложение принципа Архимеда. Плотность множества **Q** в **R**. Рациональное приближение действительных чисел. Позиционная система счисления, взаимный переход из одной системы счисления в другую. Запись информации в память ЭВМ, понятие бита и байта информации.

4. Отображения множеств, типы и классификация. Операции над отображениями $(\pm, \cdot, /, \circ, ()^{-1}, |)$.

Отображение множеств (эволюция понятий, современная трактовка понятия функции). Типы отображений: инъекция, сюръекция, биекция. Классификация отображений: $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$. Операции над отображениями: арифметические, композиции, обращение, сужение, продолжение. Построить непрерывное продолжение показательной функции $exp(x)$ с **Q** на **R** (провести доказательство непрерывности и теоремы сложения).

5. Основные элементарные функции, множество элементарных функций. Классификация элементарных функций. Неэлементарные функции.

Основные элементарные функции: постоянная, степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические, обратные тригонометрические; графики и основные свойства. Системы координат на плоскости и в пространстве: декартова, полярная, параметрическая, задание элементарных функций, взаимопереход различных систем координат.

Мера угла, построение тригонометрических функций (вычисление площади сектора или длины дуги). Многочлены, рациональные, иррациональные, алгебраические, трансцендентные функции; примеры. Неэлементарные функции; примеры.

6. Элементарные функции в комплексной плоскости.

Основные элементарные функции в комплексной области: $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $f(z) = z^n$, $f(z) = e^z$, $f(z) = \operatorname{Ln} z$, $f(z) = \sin z$, различные подходы к определению, идея аналитического продолжения, свойства. Доказательство формулы $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.

7. Аксиоматическое представление основных элементарных функций. Формула и ряд Тейлора.

Линейное, квадратичное, полиномиальное приближение основных элементарных функций. Формулы Лагранжа и Тейлора, ряд Тейлора. Остаточные члены в форме Пеано и Лагранжа. Разложение основных элементарных функций: e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$, $\ln(1+x)$. Единственность разложения в ряд Тейлора.

8. Предел функции в точке a. Пространство Lim_a. Односторонние и бесконечные пределы. Признаки существования предела. Замечательные пределы.

Предел функции в точке (окрестностное определение), $(\varepsilon - \delta)$-язык, язык последовательностей (по Гейне). Эквивалентность $(\varepsilon - \delta)$-языка и языка Гейне. Предел последовательности. Алгебраическая структура $(\pm, \cdot, /)$ и структура отношения порядка $\leq$ на множестве Lim_a. Замечательные пределы, число e. Признаки существования предела.

9. Топология числовой прямой. Окрестность точки в $\mathbf{R}$. Строение открытых и замкнутых множеств в $\mathbf{R}$.

Окрестность точки в $\bar{\mathbf{R}}$. Отделимость окрестностей. Классификация точек: предельная, внутренняя и граничные точки множества. Строение открытых и замкнутых множеств в $\mathbf{R}$. Методы решения неравенств, содержащих модуль.

10. Метрические пространства $(\mathbf{R}^n, C_{[a;b]}, C^1_{]a;b[}, c^\infty_{]a;b[})$. Сходимость в метрическом пространстве. Полные метрические пространства. Метод последовательных приближений.

Метрические пространства; примеры. Неравенство Коши-Буняковского. Покоординатная сходимость, равномерная сходимость, интегральная сходимость; примеры. Теорема Банаха. Сжимающие операторы в $\mathbf{R}$, приложение к приближенному решению уравнения $F(x) = 0$. Вычисление $\sqrt{a}$ методом последовательных приближений.

11. Непрерывность функции в точке метрического пространства. Алгебраическая структура и полнота пространства $C_{[a;b]}$.

Непрерывность функции в метрическом пространстве $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$, $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$, $f:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$. Непрерывность основных элементарных функций. Алгебраическая структура $(\pm,\cdot,/)$ и полнота пространства $C+[a;b]$ в равномерной метрике. Использование непрерывности при нахождении предела функции.

12. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Метод Больцано.

Теоремы Больцано-Коши и Вейерштрасса, непрерывность композиции и обращение (доказательство теоремы Больцано-Коши методом Больцано). Доказательство включения $C^1_{]a;b[}\subset C_{]a;b[}$. Примеры непрерывных, но не дифференцируемых функций с доказательством.

13.Задачи, приводящие к понятию производной. Дифференциал функции. Пространство $C^1_{]a;b[}$.

Задачи о касательной, о плотности, о скорости с обоснованием. Исторические подходы к введению производной (Ньютон, Лейбниц). Дифференциал функции как средство приближенного выражения приращения функции, его геометрический и механический смысл. Производные основных элементарных функций, использование цепного правила дифференцирования и производной обратной функции. Алгебраическая структура пространства $C^1_{]a;b[}$.

14. Развитие понятия производной: $f':\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f':\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$, $f':\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$, $f':\mathbf{C}\to\mathbf{C}$. Условие дифференцируемости функции.

Развитие понятия производной (число, вектор-функция, градиент, оператор), определения и взаимосвязи. Условия Коши-Римана дифференцируемости функции комплексного переменного. Примеры производной на каждый случай. Геометрический и физический смысл производных.

15. Исследование функции на экстремум. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции, непрерывно дифференцируемой на отрезке.

Локальный и глобальный экстремумы функции; определение и примеры в $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^n$ $(n\geq 2)$, $\mathbf{C}$). Необходимое (теорема Ферма) и 3 достаточных условия существования экстремума в $\mathbf{R}$. Стационарные и критические точки функции; примеры в $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^n$. Метод наискорейшего спуска для $\mathbf{R}^2$ (алгоритм). Нахождение $\max f$ и $\mathrm{mix}\, f$ $(f\in C^1_{]a;b[})$.

16. Интегрирование как обратная операция к дифференцированию. Формула Ньютона-Лейбница. Техника неопределенного интегрирования.

Задача восстановления F из выражения $dF(x) = F'(x)dx$, обращение дифференциального оператора $\frac{d}{dx} : C^1 \to \mathbf{C}$, линейность и структура ядра N оператора $\frac{d}{dx}$. Существование $\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} : C \to C^1/N$, линейность и обратимость $\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1}$, обозначение $\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} = \int \underbrace{\qquad} dx$, геометрический и физический смысл первообразной, основная теорема интегрального исчисления. Техника неопределенного интегрирования (по частям, подстановка, интегрирование рациональных функций); примеры.

17. Задачи, приводящие к понятию интеграла. Интеграл Римана. Класс интегрируемых функций.

Метод бесконечно малых. Задачи о площади плоской фигуры, о длине дуги, об объеме тела, о работе силового поля, о массе линейного стержня. Интеграл Римана. Класс L интегрируемых функций (алгебраическая структура, отношение порядка), аддитивность и монотонность интеграла Римана; примеры. Пример неинтегрируемой по Риману функции. Методика применения определенного интеграла к решению практических задач.

18. Равномерная сходимость функционального ряда. Методы разложения элементарных функций. Определение $\sin$ *и* $\cos$.

Равномерная сходимость – сходимость в метрике $C_{[a;b]}$. Примеры равномерно и неравномерно сходящихся рядов. Почленное дифференцирование и интегрирование функционального ряда. Методы разложения элементарных функций в функциональный ряд (геометрическая прогрессия, $\frac{d}{dx}$, $\int$).

Числа e, π, $\ln n$ (вычисление и оценка погрешности). Определение $\sin$ и $\cos$ посредством функционального ряда.

19. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Применение к колебательным процессам.

Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка (однородные и неоднородные). Структура общего решения. Задача Коши и единственность ее решения. Геометрическое и физическое истолкование начальных условий. Нахождение общего решения уравнения $y''+py'+qy = 0$. Исследование решения дифференциального уравнения колебательного процесса (свободные и вынужденные колебания, резонанс).

20. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Теорема Пикара. Дифференциальные уравнения основных элементарных функций.

Задачи, приводящие к понятию дифференциального уравнения. Постановка задачи Коши, геометрический и физический смысл. Теорема Пикара для уравнения $y' = f(x, y)$ методом последовательных приближений. Функциональные и дифференциальные уравнения основных элементарных функций и их решения методом функциональных рядов.

3.5. Наглядное моделирование в математическом исследовании

Интеграционные процессы в образовании в современный период развития России отражают объективные тенденции проявления трансдисциплинарных и внутридисциплинарных взаимодействий по мере углубления сущностных процессов дифференциации педагогических идей, методов и технологий. Это соответствует поведению сложных динамических систем различных слоев подрастающего поколения, заинтересованных в освоении социального опыта на основе самоорганизации, самообразования и сотрудничества. Такой синергетический подход в образовании стимулирует сближение и ассимиляцию гуманитарного и естественно-научного образования, активизируя и актуализируя визуализацию представлений нового знания, усваиваемого в вариативности подходов, смене модальностей восприятия и освоении целостных блоков информации.

В последние десятилетия социально-экономические отношения в России претерпевают значительные изменения. Человек получил больше возможностей для реализации своих способностей, самовыражения и самоактуализации, стал более открытым для общения и выбора жизненных ситуаций. Подрастающее поколение стало более нетерпимым к проявлениям догматизма, отсутствию гибкости в обучающих воздействиях, стало более прагматично и осознанно оценивать перспективы своей будущей жизни. В этих условиях возрастает роль учителя как источника (по Р. Бэкону) знаний, опыта и идеала для подражания (авторитета). Реализация этих качеств возможна при овладении учителем целым рядом профессиональных компетенций: предметных, методических, психолого-педагогических, управленческих и др. В то же время учитель-предметник должен обладать высоким уровнем профессиональной культуры, оставаясь открытым для свободного общения вне рамок профессионального взаимодействия (например, учитель математики с коллегами-учителями гуманитарных предметов), но в рамках интерпретации актуальной информации в научной области. Это может быть и профессиональная помощь в решении естественно-научных задач, и популяризация научного знания, и актуализация значимости своего предмета в структуре научных знаний. Для школьника в этом направлении особенно важно освоить единство учебного предмета (математики), его генезис, исходя из практических потребностей человека, красоту и гармонию математического знания, его существенное влияние на прогресс и комфортное развитие человечества. В то же время школьнику надо дать возможность почувствовать и освоить технологию наглядного моделирования устойчивых базисных блоков математического знания, воспроизводимых и значимых в формировании мотивационной сферы, опыта личности, творческой активности.

В плане профессиональной подготовки учителя это - задача формирования методологической компетентности учителя математики, знания генезиса и единства математического знания, приемов формирования рефлексивного поведения школьников. Будущий учитель математики должен освоить единство математического знания не только с методологических, философских и теоретических позиций, но и технологически осмыслить серию конкретных проблем математики, решаемых комплексом математических методов различных дисциплин на основе рефлексии школьника в принятии исследовательских решений. При этом реально фиксируется прикладная сторона проблемы, подчеркиваются эвристические и рефлексивные моменты, эстетическая красота математических действий. Немаловажную роль играет доступность и воспроизводимость математического материала, возможность для обучаемого интериоризировать полученные знания, актуализировать процессы коррекции способов действий при затруднении в общении и мышлении.

Выявление интегративного единства математики как науки и как педагогической задачи в контексте рефлексивного поведения школьника невозможно без содержательного и процессуального анализа научного познания – деятельности, направленной на производство и воспроизводство объективно истинного знания и требующей соответствующего мышления для своего осуществления. Выявление, возникновение и понимание науки в ее целостном виде на основе актуализации базовых интегративных связей становится важным методологическим аспектом анализа генезиса научного мышления и научной деятельности. В научном познании мыслительные действия направлены на исследование глубинной сущности реального мира, связей и отношений его вещей и процессов, законов его существования и развития.

Генезис, структура и характеристика глубинного научного познания представлены на схеме 20.

Схема 20

Генезис научного познания как методология учения

Выявление характеристик научного познания, тенденции и генезис его развития, ассоциации с профессиональной деятельностью ученого проектирует анализ исследовательского поведения в обучении, поисковую и творческую активность школьников и их механизмы, важность исследовательского поведения в плане когнитивного и социального развития, и, прежде всего, саморазвития и самоактуализации личности.

"Исследовательскую деятельность следует рассматривать как особый вид интеллектуально-творческой деятельности, порождаемой в результате функционирования механизмов поисковой активности и строящейся на базе исследовательского поведения. Но если поисковая активность определяется лишь наличием самого факта поиска в условиях неопределенной ситуации, а исследовательское поведение описывает преимущественно внешний контекст функционирования субъекта в этой ситуации, то исследовательская деятельность характеризует саму структуру этого функционирования. Она логически включает в себя мотивирующие факторы (поисковую активность) исследовательского поведения и механизм его осуществления" [173]. При этом психологи традиционно понимают поисковую активность как активность, направленную на изменение ситуации или на изменение самого субъекта, его отношение к ситуации при отсутствии определенного прогноза желательных результатов такой активности.

В этих условиях необходимо проектирование инновационных методов, форм, средств и технологий обучения естественно-научным дисциплинам в средней школе, когда исследовательская деятельность школьников актуализируется на фоне интеграции математических и естественно-научных знаний. При этом рефлексия и интеллектуальное напряжение, такие неотъемлемые атрибуты научного познания, как инсайт и нелинейное мышление, наглядное моделирование, антиципации, обострение и расчленение проблем, умение рассуждать,- должны получить адекватное отражение в поисковой активности и исследовательской деятельности школьников в контексте продуктивного социального взаимодействия. Необходима надситуационная активность школьников, создание педагогических условий рефлексивного поведения, содержательное взаимодействие математических и естественно-научных знаний на фоне совместного управления познавательной деятельностью школьников учителями учебных предметов. Только тогда возможно повышение учебной и социальной мотивации у школьников и реальное использование современных информационно-коммуникационных технологий в изучении естественно-научных дисциплин в средней школе.

3.5.1. Интеграционные процессы в математике

В современной науке наблюдается также усиление интегрирующей роли математики. Действительно, математический аппарат и математические методы могут быть использованы при изучении качественно различных фрагментов действительности. Это возможно прежде всего потому, что объективно существуют общность, связь, единство между различными областями действительности, которые можно описать с помощью одних и тех же уравнений. Тот факт, что одна и та же математическая теория может быть интерпретирована на объектах качественно различной природы, говорит об общности этих объектов, по крайней мере в количественном отношении. Широкое, неограниченное применение математики свидетельствует об общности и соответствующих областей природы, способствует раскрытию их единства и тем самым указывает новые пути интеграции знания.

Говоря об интегрирующей роли математики в современной науке, необходимо сделать одно принципиально важное замечание. Любой объект действительности обладает и качественными и количественными характеристиками. Качественная и количественная определенность объекта находятся в единстве в рамках конкретной меры: с изменением качества изменяется количественная определенность, а изменение количественной определенности неизбежно приводит к качественным изменениям. Одна мера сменяет другую. Определенность в смене мер фиксируется в виде закона, поэтому любой закон всегда предполагает и качественную и количественную характеристики.

Современный этап развития науки характеризуется усилением и углублением взаимодействия отдельных её отраслей, формированием новых форм и средств исследования, в т.ч. математизацией и компьютеризацией познавательного процесса. Распространение понятий и принципов математики в различные сферы научного познания оказывает существенное влияние как на эффективность специальных исследований, так и на развитие самой математики. В процессе познания действительности математика играет все возрастающую роль. Сегодня нет такой области знаний, где в той или иной степени не использовались бы математические понятия и методы. Проблемы, решение которых раньше считалось невозможным, успешно решаются благодаря применению математики, тем самым расширяются возможности научного познания. Современная математика объединяет весьма различные области знания в единую систему. Этот процесс синтеза наук, осуществляемый на лоне математизации, находит свое отражение и в динамике понятийного аппарата. Так, применение математики в механике, астрономии, физике и в других областях естествознания, с одной стороны, способствовало проникновению в научный аппарат указанных областей знания таких понятий, как число, функция, производная, дифференциал, интеграл, структура, система и т.д., с другой – привело к формирования дифференциального интегрального исчисления, теории вероятности, теории множеств и целого ряда других направлений математики. Использование математики в биологических и особенно гуманитарных науках содействовало образованию необычных для классической математики понятий качество, расплывчатое множество, функция принадлежности, отображение, бинарное отношение, алгебраические операции и др. Способы и методы математического мышления наделены потенциальными синтетическими возможностями М. Г. Чепиков пишет: “Математизация – один из самых древних путей синтеза научных знаний, поскольку она обеспечивала и обеспечивает на основе общности математических понятий общность научных принципов, законов, воззрений” [244]. Эвристическое взаимодействие качественных и количественных, содержательных и формальных методов исследования составляет объективную основу математизации научного знания. В этом процессе материалистическая диалектика выступает как методологическая основа математизации всего научного знания, его интеграции. Актуализация этих интеграционных процессов придает математической науке целостный характер и внутренне единство идей, методов, понятий и теорем, алгоритмов и процедур.

Интеграционные процессы в математике как науке

Рис. 37

В целом, математизация процесса познания становится определяющим фактором того, что и сама математика подвергается глубоким структурным изменениям. В этом плане развитие математики, образование общенаучных понятий, наметившуюся тенденцию к всестороннему отображению объектов природной и социальной действительности, следует рассматривать в контексте с единым тотальным процессом синтеза научного знания, являющимся отображением единства материального мира.

Актуальность рассмотрения этих вопросов подтверждается ведущим положением математики как среди фундаментальных, так и среди прикладных наук (что находит свое яркое проявление в их интенсивной математизации); с другой стороны – объективной сложностью усвоения математического содержания, обусловленной прежде всего многоступенчатым характером математических абстракций; в-третьих,- необходимостью формирования в ходе учебного процесса психолого-педагогической системы проектируемой учебно-профессиональной деятельности будущего учителя.

Приемы математической интеграции знаний. Развитие математики, появление новых математических знаний и методов определяется целым рядом приемов творческого исследования в математике (аналогии, инверсии, принцип декомпозиции, принцип суперпозиции и др. [160], важную роль в которых играют приемы творчества, приводящие к интеграции естественно-научных знаний.

Первым здесь следует назвать ***прием теоретического обобщения***. Как пишет В. В. Давыдов [57. С. 16] "При обобщении, с одной стороны, происходит поиск и обозначение словом некоторого **инварианта** в многообразии предметов и их свойств, с другой – опознание предметов данного многообразия с помощью выделенного инварианта". Поиск устойчивых, повторяющихся связей у некоторого множества сходных математических объектов на основе выделения сравнительных качеств позволяет спроектировать новый объект (или "квазиновый" в учебной деятельности, связанный с формированием понятий и базовых утверждений) в математике, при этом происходит интеграция сходных математических объектов в единое целое в свете выделенного инварианта.Существенным является то, что появление нового приводит не просто к расширению знаний и уточнению понятий, а к определенной перестройке содержания математики, появлению нового теоретического знания. "Так, одним их характерных признаков теоретического мышления служит такой анализ, который, будучи выполняемым на каком-либо конкретном событии или на одной задаче, вместе с тем вскрывает внутреннюю связь, лежащую в основе многих частных проявлений этого события или этой задачи" [57. С. 212], – эти слова известного психолога В. В. Давыдова определяют суть отличия теоретического мышления от рассудочно-эмпирического. С. Л. Рубинштейн [171] различал эмпирическое и теоретическое обобщение как основу разных уровней мышления. Первое – результат сравнения и выделения сходного, внешне одинакового в вещах. Второе – продукт особого анализа и абстракции, связанных с преобразованием исходных чувственных данных с целью обнаружения и выделения их сущности.

Наиболее ярко это прослеживается на генезисе развития понятия производной. Геометрические построения в духе античных математиков, механические соображения, применение аналитической геометрии Декарта, инфинитезимальные методы вызвали к жизни (гениями И. Ньютона и Г. В. Лейбница) создание основ дифференциального исчисления в XVII веке. Понятие производной, лежащее в основе понятия касательной, относится к синтетическим понятиям, т.е. в своем содержании и форме является обобщением разнообразных частных проявлений эмпирических понятий и явлений; с другой стороны, понятие производной содержит в себе инвариантные характеристики высокого уровня обобщенности.

Уже Диофант владел способом определения углового коэффициента касательной к алгебраической кривой. Этот алгебраический метод состоит в следующем.

Метод касательных Г. Галилея-Ж. Роберваля. Для построения касательной к параболе (рис. 38) Галилей пользовался предположением, что направление скорости движения тела и касательной в каждой точке траектории движения совпадают. Пусть тело падает из точки O под действием силы тяжести $\vec{v}_y$ и постоянной по модулю горизонтальной скоростью $\vec{v}_x$

Рис. 38

Галилей, разложив вектор скорости тела $\vec{v}$ в токе $(,)$ траектории движения на горизонтальную $\vec{v}_x$ и вертикальную $\vec{v}_y$ составляющие и пользуясь указанным предположением, приходит к пропорции

$$\frac{l_y}{x} = \frac{v_y}{v_x}$$

откуда

$$l_y = \frac{x \cdot v_y}{v_x} = \frac{v_x \cdot t \cdot gt}{v_x} = gt^2$$

или

$$l_y = 2_y$$

Систематическое изложение этого метода дал Роберваль (рис. 39).

Рис. 39

откуда $l_x = y \cdot \frac{v_x}{v_y}, l_y = x \cdot \frac{v_y}{v_x}$.

Метод нормалей и касательных Р. Декарта. Для того, чтобы провести нормаль или касательную к алгебраической кривой $y = P\ (x)$ в точке (a, b) (рис. 40) Декарт предложил построить окружность с центром в точке c на оси Ox, касающуюся данной кривой в точке $(a,\ b)$. Уравнение этой окружности имеет вид

$$(x - c)^2 + y^2 = (a - c)^2 + b^2.$$

Исключив “y” из системы уравнений

$$\begin{cases} y = P(x) \\ (x - c)^2 + y^2 = (c - a)^2 + b^2 \end{cases}$$

получим уравнение $Q(x) = 0$, а так как кривые касаются в точке (a, b), то $Q(x) = (x - a)^2 Rx$ и величина “c“ находится из этого условия с помощью метода неопределенных коэффициентов. Отсюда из подобия треугольников легко найти и d – точку пересечения касательной с осью Ox:

Рис. 40

Так, в случае параболы $y = x^2$ имеем:

$$Q(x) = x^4 + x^2 - 2cx - a^2 - b^2 + 2ac = (x - a)^2(px^2 + qx + r).$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений

$x^4 : 1 = p,$

$x^3 : 0 = - 2ap + q,$

$x^2 : 1 = r - 2aq + a^2 p,$

$x^1 : \ -2c = - 2ar + a^2 q,$

$x^0 : -a^2 - b^2 + 2ac = a^2 r,\ b = a^2$, откуда $=1$, $q = 2a,\ r = 1+3a^2,\ c = a + 2a^3$.

Далее из пропорции $\frac{a-d}{b} = \frac{b}{c-a}$ находим $d = a - \frac{b^2}{c-a} = \frac{a}{2}$.

Метод касательных П. Ферма. Алгебраический метод Диофанта получил свое развитие в методе касательных Ферма. Понимая касательную как предельное положение секущей, Ферма определяет подкасательную KL (рис. 41)

Рис. 41

из условия

$$KL = PL\,|_{h=0} = ML\cdot\frac{MN}{QN}\,|_{h=0} = R(x)\cdot\frac{h}{R(x+h)-R(x)}\,|_{h=0} = 0$$

Пользуясь методом Ферма найдем подкасательную к кривой $y=\frac{1-x}{x^2-5}$ в точке (2,1). Имеем

$$KL=\frac{1-x}{x^2-5}\cdot\frac{h}{\frac{1-x-h}{(x+h)^2-5}-\frac{1-x}{x^2-5}}\,|_{h=0}=\frac{1-x}{x^2-5}\cdot\frac{h[(x+h)^2-5]\cdot[x^2-5]}{5h+(x^2-2x)h+xh^2}\,|_{h=0}=$$

$$=\frac{1-x}{x^2-5}\cdot\frac{x^2-5}{x^2-2x-5},$$

так что в точке (2,1) получим

$$KL=(1-x)\frac{x^2-5}{x^2-2x+5}\,|_{x=2}=1/5.$$

3.5.2. Инфрааддитивные функционалы в анализе

Исследование H-пределов хаусдорфовых спектров проводится в монографии Е. И. Смирнова [277] с существенным привлечением аппарата квазинорм. В данном пункте рассматриваются счетно-полуаддитивные, инфрааддитивные квазинормы и семейства функционалов на топологической группе (ТГ) как обобщающие конструкты в функциональном анализе.

Инфрааддитивные функционалы и принципы равномерной ограниченности

В настоящем разделе предлагаются общие утверждения о равностепенной непрерывности и равномерной ограниченности семейства функционалов на топологической группе (ТГ). С одной стороны, основное утверждение работы содержит классическую теорему Банаха-Штейнгауза (вместе с ее обобщением, см. [75]), а с другой стороны, – теорему Витали-Хана-Сакса о сходящейся последовательности обобщенных мер. Известный результат С. Б. Стечкина [218] о равномерной ограниченности последовательности функционалов получен как следствие основного утверждения. Соответствующие теоремы относятся не только к полуаддитивным функционалам. Ниже все ТГ предполагаются в аддитивной записи.

Пусть X – ТГ. Множество $\Delta \subset X \times X$ назовем *насыщенным*, если оно не имеет изолированных точек и для всякого непустого открытого множества $U \subset X$ найдется открытая окрестность нуля W такая, что

$$W \subset \pi[\Delta \cap (U \times (-U))], \tag{1}$$

где $\pi : X \times X \to X$ $\pi(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Ясно, что $\Delta \neq \emptyset$ и $X \times X$ – насыщенное множество. Антидиагональ $\Gamma = \{(x, -x) : x \in X\}$ не обязательно подмножество Δ, однако Δ плотно в Γ, если Δ – насыщенное множество.Более того, для множества $\Delta \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ имеет место

Предложение 3.1. *Пусть для всякого открытого множества $U \subset \mathbf{R}^n$ существует измеримое по Лебегу множество A положительной меры такое, что*

$$\Delta \cap (U \times (-U)) \supset A \times (-A).$$

Тогда Δ – насыщенное множество.

Доказательство. Очевидно, что

$$\pi[\Delta \cap (U \times (-U))] \supset \pi[A \times (-A)] = A - A.$$

Так как лебегова мера множества A положительна, то в силу теоремы 2 из [75. С. 72] существует окрестность нуля $W \subset A - A$ и тем самым выполнено (1).

Аналогичное утверждение верно для случая, когда X – локально-компактная группа с инвариантной мерой Хаара.

Пусть μ – неотрицательный функционал на X, который может принимать, вообще говоря, значение $+\infty$ и $\Lambda_\epsilon = \{x \in X : \mu(x) \leq \epsilon\}$ – его лебеговы множества. Фнкуционал μ назовем *инфрааддитивным*, если существует насыщенное множество $\Delta \subset X \times X$ такое, что для всякого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\pi[\Delta \cap (\Lambda_\delta \times \Lambda_\delta)] \subset \Lambda_\epsilon. \tag{2}$$

Если μ – инфрааддитивный функционал и Δ – соответствующее насыщенное множество, то будем говорить, что μ – *Δ-инфрааддитивный функционал.* Всякий полуаддитивный функционал μ на X является Δ-инфрааддитивным: достаточно положить $\Delta = X \times X$. Тогда соотношение (2) примет вид $\Lambda_\delta + \Lambda_\delta \subset \Lambda_\epsilon$. Функционал μ на X, для которого

$$\mu(x_1 + x_2) \leq K[\mu(x_1) + \mu(x_2)] \tag{3}$$

при любых $x_1, x_2 \in X$, где константа K положительна, не зависит от x_1, x_2, также является Δ-инфрааддитивным; здесь снова $\Delta = X \times X$.

Предложение 3.2. *Для того, чтобы функционал μ был инфрааддитивным, необходимо и достаточно, чтобы существовали неотрицательная монотонно неубывающая непрерывная справа функция ϕ на $\mathbf{R}^+$ такая, что $\phi(0) = 0$, и насыщенное множество Δ такое, что для $(x_1, x_2) \in \Delta$ было выполнено неравенство*

$$\mu(x_1 + x_2) \leq \phi[\mu(x_1) \vee \mu(x_2)] \tag{4}$$

(Здесь, как обычно, $a \vee b$ означает наибольшее из чисел a, b.)

Доказательство. Необходимость. Пусть μ – Δ-инфрааддитивный функционал на X. Введем в рассмотрение функцию

$$\phi(\delta) = \inf_{\sigma > \delta} \inf\{\epsilon > 0 : \pi[\Delta \cap (\Lambda_\sigma \times \Lambda_\sigma)] \subset \Lambda_\epsilon\}. \tag{5}$$

Ясно, что ϕ – неотрицательная, монотонно неубывающая, непрерывная справа функция такая, что $\phi(0) = 0$. Положим $\delta = \mu(x_1) \vee \mu(x_2)$ для $(x_1, x_2) \in \Delta$ и в силу (5) получим неравенство $\mu(x_1 + x_2) \leq \phi(\delta)$. Достаточность очевидна.

В частности, неравенство (4) можно записать так:

$$\pi[\Delta \cap (\Lambda_\delta \times \Lambda_\delta)] \subset \Lambda_{\phi(\delta)} \quad (\delta > 0).$$

Заметим, что функция ϕ может принимать, вообще говоря, значение $+\infty$. Рассмотрим, например, неотрицательную функцию

$$\mu(x) = \begin{cases} n+1, & \text{if } |x| = 1 + \frac{1}{n} \ (n = 1, 2, \ldots), \\ \sqrt{|x|}, & \text{if } x \in \mathbf{R} \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} \{1 + \frac{1}{n}, -(1 + \frac{1}{n})\}. \end{cases}$$

Тогда μ – Δ-инфрааддитивный функционал ($\Delta = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$), и нетрудно видеть, что $\phi(\delta) = 2\delta^2$ для $0 \leq \delta < \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\phi(\delta) = +\infty$ для $\delta \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Известно, что для полуаддитивных функционалов из непрерывности в нуле ($\mu(0) = 0$) вытекает непрерывность в каждой точке группы. Следующий пример показывает, что для Δ-инфрааддитивных функционалов это свойство, вообще говоря, не выполнено. Действительно, функционал

$$\mu(x) = \begin{cases} 2|x|, & \text{if } x \in \mathbf{Q}, \\ |x|, & \text{if } x \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}, \end{cases}$$

Δ-инфрааддитивен, непрерывен в нуле и разрывен во всех остальных точках ($\mathbf{Q}$ – множество рациональных чисел).

Предложение 3.3. *Пусть μ – симметричный Δ-инфрааддитивный функционал на X такой, что для всякого $\epsilon > 0$ внутренность множества Λ_ϵ непуста. Тогда μ непрерывен в нуле.*

Доказательство. Пусть $\epsilon > 0$ и выберем $\delta > 0$ так, что выполнено (2). По условию существует открытое множество U такое, что $U \subset \Lambda_\delta$. Поэтому в силу (2) получим включения

$$\pi[\Delta \cap (U \times (-U))] \subset \pi[\Delta \cap (\Lambda_\delta \times \Lambda_\delta)] \subset \Lambda_\epsilon.$$

Теперь существует открытая окрестность нуля $W \subset \pi[\Delta \cap (U \times (-U))]$. Так как $\mu(0) = 0$, то получим $W \subset \Lambda_\epsilon$, что и требовалось доказать.

Следующие примеры Δ-инфрааддитивных функционалов можно привести, используя полуметрическую группу, ассоциированную с σ-алгеброй множеств. Пусть $\mathcal{S} = (S, \mathfrak{B}, m)$, где $\mathfrak{B}$ – σ-алгебра подмножеств $B \subset S$. Множество $\mathfrak{B}$ становится абелевой группой, если операцию сложения определить следующим образом: $A+B = A \triangle B$, где $A, B \in \mathfrak{B}$ и $\triangle$ – знак симметрической разности. Нулевым элементом группы является пустое множество $\emptyset$, противоположным элементом группы к данному $A \in \mathfrak{B}$ является само множество A. Множество $\mathfrak{B}$ становится полуметрическим пространством, если полуметрику ввести следующим образом: $d(A, B) = m(A \triangle B)$. Нетрудно видеть, что полуметрическое пространство $(\mathfrak{B}, d)$ является полным (см., например, [75]).

Пусть ν – обобщенная мера на $\mathfrak{B}$. Покажем, что функционал $\mu(B) = |\nu(B)|$ является Δ-инфрааддитивным на $\mathfrak{B}$. Рассмотрим множество $\Delta \subset \mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$ такое, что

$$\Delta = \{(A, B) \in \mathfrak{B} \times \mathfrak{B} : A \supset B\}.$$

Множество Δ является насыщенным. В самом деле, пусть U – произвольное отурытое множество в $(\mathfrak{B}, d)$ и $B_0 + W \subset U$, где $W = \{B \in \mathfrak{B} : m(B) < \delta\}$. Тогда для каждого $B \in W$ справедливы соотношения $B_0 \cup B \in B_0 + W$ и $B_0 \backslash B \in B_0 + W$ так, что $B = (B_0 \cup B) \triangle (B_0 \backslash B)$ и, следовательно,

$$\pi[\Delta \cap (U \times (-U))] \supset \pi[\Delta \cap \Big((B_0 + W) \times (B_0 + W)\Big)] \supset W.$$

Пусть теперь $\epsilon > 0$ и $\Lambda_\epsilon = \{B \in \mathfrak{B} : \mu(B) \leq \epsilon\}$. Положим $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ и $A \in \Lambda_\delta + \Lambda_\delta$, где $A = A_1 \triangle A_2$, $A_1, A_2 \in \Lambda_\delta$, $A_1 \supset A_2$. Тогда $A = A_1 \backslash A_2$,

$\nu(A) = \nu(A_1) - \nu(A_2)$, поэтому

$$\mu(A) = |\nu(A)| \leq |\nu(A_1)| + |\nu(A_2)| \leq \epsilon$$

и, следовательно, $A \in \Lambda_\epsilon$, что и требовалось доказать.

Семейства инфрааддитивных функционалов

Пусть X – TG. Семейство μ_α $(\alpha \in A)$ Δ-инфрааддитивных функционалов на X назовем *равномерно Δ-инфрааддитивным*, если существует неотрицательная, монотонно неубывающая, непрерывная справа функция $\phi : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^{+\,*}$ $(\mathbf{R}^{+\,*} = \mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\})$ такая, что для $(x_1, x_2) \in \Delta$, $\alpha \in A$ выполняется неравенство

$$\mu_\alpha(x_1 + x_2) \leq \phi[\mu_\alpha(x_1) \vee \mu_\alpha(x_2)].$$

Всякое семейство полуаддитивных функционалов на X является равномерно Δ-инфрааддитивным. Для всякого равномерного Δ-инфрааддитивного семейства μ_α $(\alpha \in A)$ функционалы $k\mu_\alpha$ $(k > 0)$, $\mu = \sup_{\alpha \in A} \mu_\alpha$, $\nu = \overline{\lim}_{n\to\infty}\, \mu_{\alpha_n}$ являются Δ-инфрааддитивными.

Обозначим через $\mathcal{U}$ базис открытых симметричных окрестностей нуля W топологической группы X, и пусть множество индексов A семейства μ_α $(\alpha \in A)$ фильтруется по фильтру $\mathcal{A}$. Семейство μ_α $(\alpha \in A)$ назовем *$(\Delta, \mathcal{A})$-инфрааддитивным на X*, если для каждой $W \in \mathcal{U}$ существует $B_0 \in \mathcal{A}$ такое, что для всех $B \subset B_0$, $B \in \mathcal{A}$ и $(x_1, x_2) \in \Delta$ выполнено неравенство

$$\inf_{w \in W} \sup_{\alpha \in B} \mu_\alpha(x_1 + x_2 + w) \leq \sup_{\alpha \in B} \phi[\mu_\alpha(x_1) \vee \mu_\alpha(x_2)]. \tag{6}$$

Здесь ϕ – некоторая неотрицательная монотонно неубывающая непрерывная справа функция на $\mathbf{R}^+$ with $\phi(0) = 0$. Для лебеговых множеств определение (6) может записано следующим образом: для всякого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\pi[\Delta \cap \Big(\bigcap_{\alpha \in B} \Lambda_\delta(\alpha) \times \bigcap_{\alpha \in B} \Lambda_\delta(\alpha)\Big)] \subset \bigcap_{\alpha \in B} \Lambda_\epsilon(\alpha) + W.$$

Ясно, что равномерно Δ-инфрааддитивное семейство является $(\Delta, \mathcal{A})$-инфрааддитивным.

Пусть T – множество, фильтрующееся по $\mathfrak{F}$ со счетным базисом (F_n), где $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$.

Теорема 3.4. *Пусть* X – TG *и* $\mu(t,x)$ – *неотрицательный функционал на* $T \times X$ *такой, что*

1) *для каждого* $x \in X_0 \subset X$, *где* X_0 – *нетощее симметрическое множество, справедливо неравенство*

$$\overline{\lim_{\mathfrak{F}}}\ \mu(t,x) < \infty,$$

2) $\{\mu(t,x) : t \in T\}$ *является* $(\Delta, \mathfrak{F})$*-инфрааддитивным семейством полунепрерывных снизу функционалов на* X.

Тогда существует $\xi^* \in X_0$ *такая, что*

$$\overline{\lim_{\mathcal{U},\mathfrak{F}}}\ \mu(t,x) \le \phi\Big(\overline{\lim_{\mathfrak{F}}}\,\mu(t,\xi^*)\Big).$$

Доказательство. Пусть $L = \sup_{x\in X_0} \overline{\lim}_{\mathfrak{F}}\ \mu(t,x)$. Выберем последовательность $\xi_m \in X_0$ так, что $\alpha_m \le \alpha_{m+1}$ для $m = 1, 2, \dots$ и $\lim_{m\to\infty} \alpha_m = L$, где

$$\alpha_m = \overline{\lim_{\mathfrak{F}}}\ \mu(t,\xi_m).$$

Введем в рассмотрение множества

$$P_m = \{x \in X_0 : \overline{\lim_{\mathfrak{F}}}\ \mu(t,x) \le \alpha_m \quad \text{и} \quad \overline{\lim_{\mathfrak{F}}}\ \mu(t,-x) \le \alpha_m\}.$$

Ясно, что $X_0 = \bigcup_{m=1}^{\infty} P_m$, поэтому найдется номер m_0 такой, что P_{m_0} – нетощее множество в X. Пусть теперь $\epsilon > 0$, $\delta > 0$, $\phi(\alpha_{m_0} + \delta) \le \phi(\alpha_{m_0}) + \epsilon$. Очевидно, множества

$$P_{m_0,n} = \{x \in X : \mu(t,x) \le \alpha_{m_0} + \delta,\ \mu(t,-x) \le \alpha_{m_0} + \delta,\ t \in F_n\}$$

такие, что $P_{m_0} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_{m_0,n}$. В силу того, что P_{m_0} – нетощее множество, найдется номер n_0 такой, что P_{m_0,n_0} плотно в некотором открытом множестве U. В силу замкнутости в X лебеговых множеств функционалов $\mu(t,x)$ при каждом $t \in T$ получим $U \subset P_{m_0,n_0}$. Таким образом, $\pm U \subset \Lambda_{\alpha_{m_0}+\delta}(t)$ для всех $t \in F_{n_0}$, где $\Lambda_\eta(t) = \{x \in X : \mu(t,x) \le \eta\}$. Так как семейство $\{\mu(t,x) : t \in T\}$ является $(\Delta, \mathfrak{F})$-инфрааддитивным, то существует $W_1 \in \mathcal{U}$ такая, что для $n \ge n_0$

$$W_1 \subset \pi[\Delta \cap (U \times (-U)] \subset \pi[\Delta \cap \Big(\bigcap_{t\in F_n} \Lambda_{\alpha_{m_0}+\delta}(t) \times \bigcap_{t\in F_n} \Lambda_{\alpha_{m_0}+\delta}(t)\Big)].$$

Выберем $W \in U$ так, что $W + W \subset W_1$, и найдем номер n_1 такой, что для $n \geq n_1$ выполнено неравенство

$$\inf_{w \in W} \sup_{t \in F_n} \mu(t, x_1 + x_2 + w) \leq \sup_{t \in F_n} \phi[\mu(t, x_1) \vee \mu(t, x_2)],$$

где $(x_1, x_2) \in \Delta$. Отсюда следует, что для $x \in W_1$ и $n^* = n_0 \vee n_1$ выполнено неравенство

$$\inf_{w \in W} \sup_{t \in F_{n^*}} \mu(t, x + w) \leq \phi(\alpha_{m_0} + \delta) \leq \phi(\alpha_{m_0}) + \epsilon.$$

Поэтому найдется $w_x^* \in W$ такая, что для $x \in W_1$

$$\sup_{t \in F_{n^*}} \mu(t, x + w_x^*) \leq \phi(\alpha_{m_0}) + 2\epsilon.$$

Но $W_1 + w_x^* \supset W + W + w_x^* \supset W$, поэтому для $x \in W$ и $t \in F_{n^*}$ получим неравенство $\mu(t, x) \leq \phi(\alpha_{m_0}) + 2\epsilon$

Последнее неравенство означает, что

$$\overline{\lim_{\mathcal{U}, \mathfrak{F}}} \mu(t, x) \leq \phi\Big(\overline{\lim_{\mathfrak{F}}} \mu(t, \xi_{m_0} \Big).$$

Остается положить $\xi^* = \xi_{m_0}$. Теорема доказана.

Заметим, что теорема 3.4 может быть использована при рассмотрении не полунепрерывных снизу функционалов. Действительно, если μ – неотрицательный функционал на X, то функционал

$$\mu^*(x) = \sup_{\mathcal{U}} \inf_{w \in W} \mu(x + w), \tag{7}$$

где $\mathcal{U}$, как обычно, базис окрестностей нуля W в X, является полунепрерывным снизу на X и лебеговы множества Λ_ϵ^* замкнуты в X и содержат замыкания соответствующих лебеговых множеств Λ_ϵ функционала μ; при этом $\mu^*(x) \leq \mu(x)$. Нетрудно видеть, что семейство μ_α^* $(\alpha \in A)$ будет соответственно равномерно и $(\Delta, \mathcal{A})$-инфрааддитивным, если таковым будет семейство μ_α $(\alpha \in \mathcal{A})$.

Приложения

Приведем теперь ряд следствий теоремы 3.4. Напомним, что в квазинормированном линейном пространстве топология определяется неотрицательной функцией $||\,.\,|| : Y \to \mathbf{R}^+$ со следующими свойствами:

– $||y|| = 0$ тогда и только тогда, когда $y = 0$;
– $|| - y|| = ||y||$;
– $||y_1 + y_2|| \leq ||y_1|| + ||y_2||$ для всех $y_1, y_2 \in Y$;
– $\lim_{\alpha_n \to 0} ||\alpha_n y|| = 0$ и $\lim_{||y_n|| \to 0} ||\alpha y_n|| = 0$.

Следствие 3.5. ([75. Теорема Какутани].) *Пусть Y – квазинормированное линейное пространство. Тогда Y – топологическое линейное пространство.*

Доказательство. Для того, чтобы доказать утверждение следствия, достаточно установить непрерывность в нуле отображения $(\alpha, y) \mapsto \alpha y$. Последнее вытекает из теоремы 3.4 в случае, когда $X = \mathbf{R}$, $T = Y$, $F_n = \{y \in Y : ||y|| < \frac{1}{n}\}$ и $\mu(t, x) = ||xt||$. Выполнение свойств 1)-2) теоремы 3.4. очевидно, и поэтому $\lim\limits_{t \to 0, x \to 0} ||xt|| = 0$, тем самым следствие доказано.

Следствие 3.6. ([75], принцип равномерной непрерывности). *Пусть X – нетощее линейное топологическое пространство и $\{T_\alpha : \alpha \in A\}$ – семейство непрерывный отображений пространства X в квазинормированное линейное пространство Y. Пусть для всякого $\alpha \in A$*

$$||T_\alpha(x + y)|| \leq ||T_\alpha(x)|| + ||T_\alpha(y)|| \quad (x, y \in X)$$

и

$$||T_\alpha(tx)|| = ||tT_\alpha(x)|| \quad (t > 0).$$

Если множество $\{T_\alpha(x) : \alpha \in A\}$ ограничено при всяком фиксированном $x \in X$, то

$$\lim_{x \to 0} \sup_{\alpha \in A} ||T_\alpha(x)|| = 0.$$

Доказательство. Пусть

$$T = \mathbf{R}^+, \quad F_n = \left\{t \in \mathbf{R}^+ : 0 \leq t < \frac{1}{n}\right\},$$

$$\mu(t, x) = \sup_{\alpha \in A} ||T_\alpha(tx)||, \quad \Delta = X \times X.$$

Так как при каждом $t \in \mathbf{R}^+$ функционал $\mu(t, x)$ полунепрерывен снизу, то выполнение свойств 1)-2) теоремы 3.4 очевидно, и поэтому

$$\overline{\lim_{x \to 0, \mathfrak{F}}} \mu(t, x) \leq \phi\Big(\overline{\lim_{\mathfrak{F}}} \mu(t, \xi^*)\Big).$$

Однако $\overline{\lim\limits_{\mathfrak{F}}}\ \mu(t,\xi^*) = 0$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0,\mathfrak{F}} \mu(t,x) = 0$, что и требовалось доказать.

Следствие 3.7. ([240], теорема Витали-Хана-Сакса.) *Пусть $(S,\mathfrak{B},m)$ – измеримое пространство с конечной мерой m и $\{\lambda_n(B)\}$ – последовательность комплексных обобщенных мер таких, что их полные вариации $|\lambda_n|(S)$ конечны при $n = 1,2,\ldots$. Допустим, что все меры $\lambda_n(B)$ m-абсолютно непрерывны и что для каждого множества $B \in \mathfrak{B}$ существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} \lambda_n(B) = \lambda(B)$. Тогда меры λ_n являются равностепенно (по n) m-абсолютно непрерывными.*

Доказательство. Пусть $(\mathfrak{B},d)$ – ассоциированная ТГ, являющаяся нетощим полуметрическим пространством, $X = \mathfrak{B}$, $T = \mathbf{N}$ и $F_n = \{i \in \mathbf{N} : i \geq n\}$. Введем в рассмотрение функционал

$$\mu(n,B) = \sup_{k\geq 1} |\lambda_{n+k}(B) - \lambda_n(B)|$$

и положим $\Delta = \{(A,B) \in \mathfrak{B}\times\mathfrak{B} : A \supset B\}$, $\phi(\delta) = 2\delta$. Ясно, что в доказательстве нуждается лишь свойство 2 теоремы 3.4. Очевидно, $\{\lambda_{n+k}(B) - \lambda_n(B)\}$ – равномерно Δ-инфрааддитивной семейство и, в силу теоремы 3.4,

$$\overline{\lim_{B\to 0,\mathfrak{F}}}\ \mu(n,B) \leq \phi\Big(\overline{\lim_{\mathfrak{F}}}\ \mu(n,\xi^*)\Big).$$

Но $\overline{\lim}_{\mathfrak{F}}\ \mu(n,\xi^*) = 0$, поэтому $\lim\limits_{B\to 0,n\to\infty} \mu(n,B) = 0$, и в силу m-абсолютной непрерывности мер λ_n получим $\lim\limits_{B\to 0,n\to\infty} \lambda_n(B) = 0$, что и требовалось доказать.

Следствие 3.8. ([218], теорема С. Б. Стечкина.) *Пусть функционалы $F_n(x)$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ определены в шаре $E_1 = \{x \in E : ||x|| \leq 1\}$ банахова пространства E и удовлетворяют следующим условиям:*

(i) *для всех $x, y, x+y \in E_1$ выполняется неравенство*

$$|F_n(x+y)| \leq K\{|F_n(x)| + |F_n(y)|\} \quad (n = 0,1,2,\ldots),$$

где константа $K > 0$ не зависит от n;

(ii) *для любого номера $n = 0,1,2,\ldots$ найдется $\delta_n > 0$ такое, что $|F_n(x)| \leq M$ для всех $x \in E$, $||x|| \leq \delta_n$, где константа M не зависит от n;*

(iii) *для любого $x \in E_1$,*

$$\sup_n |F_n(x)| = L(x) < +\infty.$$

Тогда

$$\sup_n \sup_{||x||\leq 1} |F_n(x)| < +\infty.$$

Доказательство. Положим $X = E$, $T = \mathbf{N}$, $P_n = \{i \in \mathbf{N} : i \geq n\}$, $\Delta = \{(x, y) \in E \times E : x + y \in E_1\}$, $\phi(\delta) = 2K\delta$. Ясно, что Δ – насыщенное множество. Пусть далее $\mu(n, x) = |F_{n-1}(x)|$ для $x \in E_1$ и $\mu(n, x) = +\infty$ для $x \in E \backslash E_1$. Тогда семейство $\{\mu^*(n, x) : n \in T\}$ является равномерно Δ-инфрааддитивным. Так как $\overline{\lim}_{n\to\infty} \mu^*(n, x) < +\infty$ для $x \in E_1$, то в силу теоремы 3.4 существует $\xi^* \in E_1$ такая, что

$$\overline{\lim_{x\to 0, n\to\infty}} \mu^*(n, x) \leq \phi\Big(\overline{\lim_{n\to\infty}} \mu^*(n, \xi^*)\Big) = L < +\infty.$$

Теперь для $\epsilon > 0$ существует симметричная окрестность нуля W и n^* такие, что $\mu^*(n, x) \leq L + \epsilon$ для $n \in P_{n^*}$, $x \in W$. Для каждого $n \in P_{n^*}$, $x \in W$ выберем элемент $z \in E_1$ такой, что

$$\mu(n, z) \leq \mu^*(n, x) + \epsilon, \quad ||x - z|| < \delta_n.$$

Таким образом, для $x \in W$, $n \in P_{n^*}$ получим

$$\mu(n, x) \leq K\{\mu(n, z) + \mu(n, x - z)\} \leq K(L + M + 2\epsilon).$$

Отсюда $\sup\limits_n \sup\limits_{||x||\leq 1} \mu(n, x) < +\infty$, Что и требовалось доказать.

Следующее утверждение обобщает классическую теорему Банаха-Штейнгауза о сгущении особенностей [75], а также результат П. Фитспатрика [269].

Следствие 3.9. *Пусть X – ТГ, $\xi_n \to 0$ в X и (p_n) а равномерно $X \times X$-инфрааддитивное семейство функционалов такое, что $\phi(\delta) < +\infty$ для каждого $\delta \in \mathbf{R}^+$, и существует последовательность $a_k \to +\infty$ для которой все множества $\{x \in X : p_n(x) \leq a_k\}$ $(k, n \in \mathbf{N})$ замкнуты в X. Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sup\limits_{x\in U} p_n(x) = +\infty$ для каждой окрестности нуля U в X, то множество*

$$Z = \{x \in X : \overline{\lim_{n\to\infty}} p_n(\xi_n + x) \vee p_n(\xi_n - x) = +\infty\}$$

является G_δ-множеством таким, что $X \backslash Z$ тощее.

Доказательство. Тот факт, что $X \backslash Z$ является G_δ-множеством вытекает из определения Z. Допустим, что $X_0 = X \backslash Z$ нетощее множество, и введем в рассмотрение функционал $\nu(n,x) = p_n(\xi_n + x)$, где множество $\mathbf{N}$ фильтруется по фильтру $\mathfrak{F}$ со счетным базисом (F_n), $F_n = \{i \in \mathbf{N} : i \geq n\}$. Покажем, что семейство $\{\nu(n,x) : n \in \mathbf{N}\}$ является $(\Delta, \mathfrak{F})$-инфрааддитивным ($\Delta = X \times X$). Действительно, пусть $x_1, x_2 \in X$, $W \in \mathcal{U}$. Выберем номер n_0 такой, что для $n \geq n_0$ выполнено $\xi_n \in W$. Тогда, очевидно, справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} &\inf\nolimits_{w\in W} \sup\nolimits_{n\geq j}\, \nu(n, x_1 + x_2 + w) = \inf\nolimits_{w\in W} \sup\nolimits_{n\geq j}\, p_n(x_1 + x_2 + \xi_n + w) \\ &\leq \sup\nolimits_{n\geq j}\, p_n(x_1 + x_2 + \xi_n + \xi_n) \leq \sup\nolimits_{n\geq j}\, \phi[p_n(x_1 + \xi_n) \vee p_n(x_2 + \xi_n)] \\ &= \sup\nolimits_{n\geq j}\, \phi[\nu(n, x_1) \vee \nu(n, x_2)] \quad (j \geq n_0). \end{aligned}$$

Теперь выполнение свойств 1)-2) теоремы 3.4 для функционала ν^* очевидно, поэтому существует $\xi^* \in X_0$ такая, что

$$\overline{\lim_{x\to 0, n\to\infty}}\ \nu^*(n,x) \leq \phi\Big(\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \nu^*(n,\xi^*)\Big) < +\infty.$$

Так как $a_k \to +\infty$, то для $n \in F_{n^*}$, $x \in W$ получим $\nu^*(n,x) \leq a_{k_0}$ или $p_n^*(\xi_n + x) \leq a_{k_0}$. Выберем $U \in \mathcal{U}$ и $i \geq n^*$ так, что $U + U \subset W$ и $\xi_n \in U$ для $n \geq i$. Тогда $p_n^*(x) \leq a_{k_0}$ для $x \in U$, $n \geq i$. По условию следствия множества $\{x \in X : p_n^*(x) \leq a_k\}$ и $\{x \in X : p_n(x) \leq a_k\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ имеют одинаковую внутренность, и, следовательно, $p_n(x) \leq a_{k_0}$ при $x \in U$, $n \in F_i$, что противоречит условию. Следствие доказано.

3.5.3. Об одном семействе счетно-полуаддитивных функционалов

В настоящем разделе даны условия полунепрерывности снизу счетно-полуаддитивных функционалов на топологической группе. Рассматриваются приложения к идеально выпуклым множествам и задаче об уравновешенном базисе топологическо векторной группы.

Счетно-полуаддитивные функционалы

Пусть X – топологическая группа (ТГ) в аддитивной записи и $\mu = \mu(x)$ – действительнозначный функционал на X такой, что $\mu(0) = 0$, могущий принимать, вообще говоря, значения $+\infty$ и $-\infty$. Как известно, с функционалом можно ассоциировать функционалы:

$$\mu^*(x) = \underline{\lim_{y\to x}}\ \mu(y) \quad \text{и} \quad \mu_*(x) = \overline{\lim_{y\to x}}\ \mu(y).$$

Нетрудно видеть, что справедливы соотношения

$$\mu^*(x) = \sup_{\mathcal{U}} \inf_{w \in W} \mu(x+w) \quad \text{и} \quad \mu_*(x) = \inf_{\mathcal{U}} \sup_{w \in W} \mu(x+w),$$

где $\mathcal{U}$ – базис симметричных открытых окрестностей нуля в ТГ X, причем функционалы μ^* и μ_* являются соответственно полунепрерывнвми снизу и сверху на X и имеет место неравенство

$$\mu^*(x) \leq \mu(x) \leq \mu_*(x) \quad (x \in X).$$

Лебеговы множества $V^*_\epsilon = \{x \in X : \mu^*(x) \leq \epsilon\}$ замкнуты в X и содержат замыкания соответствующих лебеговых множеств V_ϵ функционала μ; лебеговы множества $U^\epsilon_* = \{x \in X : \mu_*(x) < \epsilon\}$ открыты и содержатся во внутренности соответствующих лебеговых множеств U^ϵ функционала μ. Таким образом, имеет место цепочка включений

$$U^\epsilon_* \subset \overset{\circ}{U^\epsilon} \subset U^\epsilon \subset V_\epsilon \subset \overline{V}_\epsilon \subset V^*_\epsilon$$

(черта, как обычно, обозначает замыкание, а кружок – внутренность множества).

Напомним [198], что неотрицательный функционал μ называется *счетно-полуаддитивным на* X, если из сходимости ряда $x = \sum_{n=1}^\infty x_n$ вытекает $\mu(x) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(x_n)$. При некоторых ограничениях счетно-полуаддитивные функционалы оказываются непрерывными.

Теорема 3.10. [198] *Пусть μ – счетно-полуаддитивный функционал на метрическом векторном пространстве (МВП) X и μ^* непрерывен. Тогда $\mu = \mu^*$.*

В качестве следствий теоремы 3.10 могут быть получены теоремы о замкнутом графике и теорема Банаха-Штейнгауза о равномерной ограниченности, теорема о несплющенности воспроизводящего конуса и теорема существования базиса Шаудера. Установим более общее, чем теорема 3.10 утверждение для метрических групп.

Теорема 3.11. *Пусть μ – счетно полуаддитивный функционал на МГ X и для каждого $\epsilon > 0$ внутренность множества V^*_ϵ непуста. Тогда $\mu = \mu^*$ (в частности, $\overset{\circ}{V_\epsilon} = \overset{\circ}{V^*_\epsilon}$ $(\epsilon > 0)$).*

Доказательство. Так как для МГ имеем соотношение $\mu^*(x) = \inf_{x_n \to x} \underline{\lim}_{n\to\infty} \mu(x_n)$, то очевидно, для справедливости равенства $\mu = \mu^*$ достаточно установить выполнение неравенства $\mu(x) \leq \mu^*(x)$ $(x \in X)$. Пусть $d = d(x)$ – неотрицательный, симметричный полуаддитивный функционал, определяющий топологию МГ X; пусть $x_0 \in X$, $\epsilon > 0$ и $\mu^*(x_0) < +\infty$. Так как $\overset{\circ}{V}{}^*_{\epsilon/2} \neq \emptyset$, то найдутся элементы $z_1' \in \overset{\circ}{V}{}^*_{\epsilon/2}$ и $x_1' \in X$ такие, что

$$d(x_0 - x_1') < 1, \quad \mu^*(z_1' + (x_0 - x_1')) \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad \mu(x_1') \leq \mu^*(x_0) + \frac{\epsilon}{2}.$$

При таком выборе точек $\mu^*(z_1') \leq \frac{\epsilon}{2}$, поэтому подберем $z_1 \in \overset{\circ}{V}{}^*_{\epsilon/2}$, $x_1 \in X$ так, что

$$\mu(z_1) \leq \epsilon, \quad \mu^*(z_1 + (x_0 - x_1)) \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad d(x_0 - x_1) < 1, \quad \mu(x_1) \leq \mu^*(x_0) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Аналогично, для внутренности множества $V^*_{\epsilon/2^2}$ найдется элемент $z_2' \in \overset{\circ}{V}{}^*_{\epsilon/2^2}$, а затем и $z_2 \in \overset{\circ}{V}{}^*_{\epsilon/2^2}$ такой, что $\mu(z_2) < \frac{\epsilon}{2}$, а также найдется элемент $x_2 \in X$ такой, что

$$\mu^*(z_2 + (x_0 - x_1 - x_2)) \leq \frac{\epsilon}{2^2}, \quad d(x_0 - x_1 - x_2) < \frac{1}{2},$$

$$\mu(x_2 - z_1) \leq \mu^*(z_1 + (x_0 - x_1)) + \frac{\epsilon}{2^2}.$$

Продолжая этот процесс, получим последовательности элементов $x_n \in X$, $z_n \in \overset{\circ}{V}{}^*_{\epsilon/2^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ такие, что $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ в МГ X, $\mu(z_n) \leq \epsilon/2^{n-1}$ и для каждого $n = 1, 2, \ldots$ выполнены неравенства $(z_0 = 0)$:

$$\mu^*\Big(z_n + (x_0 - \sum_{k=1}^{n} x_k)\Big) \leq \frac{\epsilon}{2^n}, \quad \mu(x_n - z_{n-1}) \leq \mu^*\Big(z_{n-1} + x_0 - \sum_{k=1}^{n} x_k\Big) + \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Так как

$$\begin{gathered}\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu(x_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(x_n - z_{n-1}) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(z_{n-1}) \\ \textstyle\leq \mu^*(x_0) + \frac{\epsilon}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \mu^*(z_{n-1} + x_0 - \sum_{k=1}^{n-1} x_k) + \frac{\epsilon}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(z_{n-1}) \\ \leq \mu^*(x_0) + 4\epsilon,\end{gathered}$$

то в силу счетной полуаддитивности функционала μ получим

$$\mu(x_0) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(x_n) \leq \mu^*(x_0) + 4\epsilon.$$

Но $\epsilon > 0$ было выбрано произвольно, поэтому $\mu(x_0) \leq \mu^*(x_0)$, тем самым $\mu = \mu^*$. Теорема доказана.

Из теоремы следует, что μ – полунепрерывный снизу функционал на X, следовательно, может быть получен ряд новых утверждений, особенно для несимметричных функционалов.

В работе [107] Е. А. Лифшиц ввел в рассмотрение так называемые идеально выпуклые множества в банаховом пространстве E. Напомним, что множество $M \subset E$ *идеально выпукло*, если для произвольной ограниченной последовательности $x_i \in M$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и последовательности неотрицательных чисел $\alpha_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$ с суммой $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 1$ элемент $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ принадлежит M. Если теперь взять идеально выпуклое множество M так, что $0 \in M$ (это возможно в силу инвариантности идеальной выпуклости относительно сдвигов) и обозначить через p_M функционал Минковского множества M

$$p_M(x) = \begin{cases} \inf\{\epsilon > 0 : x \in \epsilon M\} & (x \in L(M)), \\ +\infty & (x \in E \backslash L(M))\,; \end{cases}$$

то нетрудно видеть, что p_M – неотрицательный полуаддитивный функционал на E и, более того, обладающий свойством счетной полуаддитивности. Если к тому же заметить, чтоналичие непустой внутренности лебеговых множеств V_ϵ^* функционала p_M^* не зависит от $\epsilon > 0$, то в силу теоремы 1.14 получим

Следствие 3.12. [107] *Пусть M – идеально выпуклое множество, лежащее в банаховом пространстве E. Тогда* $\overset{\circ}{M}=\overset{\circ}{\overline{M}}$.

Для сублинейного функционала μ получим следующее утверждение.

Следствие 3.13. *Пусть μ – счетно-полуаддитивный, сублинейный функционал на МГ X. Тогда* $\overset{\circ}{V}_\epsilon=\overset{\circ}{V}{}_\epsilon^*$ $(\epsilon > 0)$.

Доказательство. Прежде всего ясно, что наличие непустой внутренности V_δ^* не зависит от $\delta > 0$. Поэтому, если $\overset{\circ}{V}{}_\epsilon^*= \emptyset$, то$\overset{\circ}{V}_\epsilon=\overset{\circ}{V}{}_\epsilon^*$ $(\epsilon > 0)$. Если же $\overset{\circ}{V}{}_{\epsilon_0}^*\neq \emptyset$ для некоторого $\epsilon_0 > 0$, то в силу теоремы 1.14 получим равенство $\mu = \mu^*$ и, тем самым, равенство $\overset{\circ}{V}_\epsilon=\overset{\circ}{V}{}_\epsilon^*$ $(\epsilon > 0)$. Очевидно, равенство $\overset{\circ}{V}_\epsilon=\overset{\circ}{V}{}_\epsilon^*$ может быть заменено $\overset{\circ}{V}_\epsilon=\overset{\circ}{\overline{V}}_\epsilon$.

Последнее следствие можно применить к теории пространств Лоренца. Пусть $(X, ||\,.\,||)$ – идеальное пространство в пространстве S всех измеримых почти всюду конечных функций на измеримом пространстве

$(\Omega, \mathfrak{V}, m)$ с конечной мерой m (эквивалентные функции отождествляются), топология которого определяется квазинормой

$$||\phi||_S = \int_\Omega \frac{|\phi(s)|}{1 + |\phi(s)|}\, dm.$$

Известно, что X непрерывно вложено в S и норма

$$||x||^* = \inf_{x_n \to x} \varliminf_{n\to\infty} ||x_n||,$$

где $x_n \to x$ в S, определяет векторное пространство $\overline{\overline{X}} = \{x \in S : ||x||^* < \infty\}$, которое называют *пространством Лоренца, построенным по пространству* X [65]. Если $(\overline{\overline{X}}, \tau)$ – топологическое простррвнство S, то ясно, что $\mu^* = ||\,.\,||^*$ построен в топологии τ по неотрицательному сублинейному функционалу $\mu = ||\,.\,||$. В силу полноты X функционал μ счетно-полуаддитивен на X, поэтому в силу следствия 3.13 получим $\overset{\circ}{V_\epsilon} = \overline{\overset{\circ}{V_\epsilon}}$ $(\epsilon > 0)$. Если $\tau|_X \neq ||\,.\,||$, то $\overset{\circ}{V_\epsilon} = \emptyset = \overline{\overset{\circ}{V_\epsilon}}$ и $\tau < ||\,.\,||^*$; если же $\tau|_X = ||\,.\,||$, то $\overline{\overset{\circ}{V_\epsilon}} \neq \emptyset$ $(\epsilon > 0)$ и $\mu = \mu^*$ в силу следствия 3.13. Последнее означает, что идеальное пространство X является пространством Лоренца.

Однако интерес представляет ситуация, когда для μ в МГ X $\overline{\overset{\circ}{V_\epsilon}} \neq \emptyset$ $(\epsilon > 0)$ и, тем не менее, имеет место равенство $\overset{\circ}{U^\epsilon} = \overline{\overset{\circ}{U^\epsilon}}$.

Теорема 3.14. *Пусть* $u(z)$ *– плюрисубгармоническая непрерывная функция в области* $G \subset \mathbf{C}^n$. *Тогда для лебеговых множеств* U^ϵ *имеет место равенство* $\overset{\circ}{U^\epsilon} = \overline{\overset{\circ}{U^\epsilon}}$ $(\epsilon > 0)$ *(черта означает замыкание в* G*).*

Доказательство. Очевидно, без ограничения общности можно считать, что $0 \in G$ и $u(0) = 0$. Положив $\mu(z) = u(z)$ $(z \in G)$ и $\mu(z) = +\infty$ $(z \in \mathbf{C}^n \backslash G)$, получим полунепрерывный сверху функционал на МГ $\mathbf{C}^n$ в обычной топологии с теми же лебеговыми множествами U^ϵ $(\epsilon > 0)$, что и у функции $U(z)$ $(z \in G)$. Кроме того, ясно, что доказательство достаточно провести для случая МГ $\mathbf{C}$ и субгармонической функции.

Установим теперь каноническую открытость лебеговых множеств U^ϵ субгармонической функции $U(z)$. Прежде всего, ясно что U^ϵ $(\epsilon > 0)$ – открытые множества в силу полунепрерывности сверху функционала $\mu(z)$ и открытости области G в $\mathbf{C}$. Предположим, что $\overset{\circ}{U^\epsilon} = U^\epsilon \neq \overline{\overset{\circ}{U^\epsilon}} \subset V_\epsilon$. Тогда найдется $z_0 \in \partial U^\epsilon$ и открытый круг $S(z_0, r_0)$ такие, что

$$S(z_0, r_0) \subset \overline{U^\epsilon} \quad \text{и} \quad \mu(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta \quad (0 < r < r_0).$$

Так как граница ∂U^ϵ является замкнутым и тощим множеством, то найдется круг $S^* = S(z^*, \delta) \subset S(z_0, r_0)$ такой, что $S^* \subset U^\epsilon$ и, следовательно, $\mu(z) < \epsilon$ $(z \in S^*)$. Пусть $|z_0 - z^*| = r^* < r_0$ и выберем θ_1, θ_2 такие, что $0 \le \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$ и $z_0 + r^* e^{it} \in S^*$ для $t \in [\theta_1, \theta_2]$. Тогда получим

$$\begin{aligned}\epsilon \le \mu(z_0) \qquad & \le \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_0^{2\pi} \mu(z_0 + r^* e^{it})\, dt \\ & = \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu(z_0 + r^* e^{it})\, dt + \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{[0,2\pi]\setminus[\theta_1,\theta_2]} \mu(z_0 + r^* e^{it})\, dt \\ & < \tfrac{1}{2\pi}(\theta_2 - \theta_1)\epsilon + \tfrac{1}{2\pi}[2\pi - (\theta_2 - \theta_1)]\epsilon = \epsilon.\end{aligned}$$

Противоречие. Значит, U^ϵ – канонически открытое множество $(\epsilon > 0)$. Теорема доказана.

В качестве следствия теоремы 3.14 может быть получена обобщенная теорема Гарнака [43. С. 94].

Топологические векторные группы

Напомним, что *топологической векторной группой* (ТВГ) называется векторное пространство X над $\mathbf{R}$, наделенное топологией τ, в которой

(a) отображение $(x, y) \to x + y$ непрерывно,

(b) для каждого $\lambda \in \mathbf{R}$ отображение $x \to \lambda x$ непрерывно.

ТВГ X обладает базисом $\mathcal{V}$ симметричных окрестностей нуля, удовлетворяющих условиям:

(a) для каждой окрестности $W \in \mathcal{V}$ существует окрестность $V \in \mathcal{V}$ такая, что $V + V \subset W$;

(b) для каждой окрестности $V \in \mathcal{V}$ и для каждого $\lambda \ne 0$ существует окрестность $W \in \mathcal{V}$ такая, что $W \subset \lambda V$ (равносильно $\lambda^{-1} W \subset V$).

Из метризационных теорем Дж. Биркгофа [267] следует, что при наличии счетного базиса $\mathcal{V}$ топология τ может быть определена неотрицательным, симметричным, полуаддитивным функционалом $d = d(x)$ на X таким, что для любого $\lambda \in \mathbf{R}$ выполнено $\lim_{x \to 0} d(\lambda x) = 0$. Известно, что если также для каждого $x \in X$ имеем $\lim_{\lambda \to 0} d(\lambda x) = 0$, то X обладает базисом $\mathcal{V}$ из уравновешенных и поглощающих окрестностей нуля, т.е. X – топологическое векторное пространство (ТВП) [258. С. 53]. Однако неизвестно, будет ли каждая ТВГ обладать базисом уравновешенных окрестностей нуля, что естественно в приложениях. Очевидно, что наличие базиса из уравновешенных окрестностей нуля равносильно выполнению соотношения $\lim\limits_{x \to 0, \lambda \to 0} d(\lambda x) = 0$. К тому же в этом случае ТВГ удобно задается асссоциированным неотрицательным функционалом $d = d(x)$, удовлетворяющим двум естественным условиям:

$$\begin{array}{ll}(\mathrm{a})\ d(x_1+x_2)\leq d(x_1)+d(x_2)\quad (x_1,x_2\in X); & (11)\\ (\mathrm{b})\ d(0)=0 \text{ и } d(\lambda x)\leq d(x)\quad (|\lambda|\leq 1, x\in X). & \end{array}$$

Теорема 3.15. *Пусть* (X,τ) *– ТВГ со счетным базисом окрестностей нуля. Тогда для того, чтобы* (X,τ) *обладала базисом окрестностей нуля из уравновешенных множеств, необходимо и достаточно, чтобы существовал ассоциированный функционал* $d=d(x)$*, задающий топологию* τ*, такой, что для каждого* $x\in X$ *функция* $d(tx)$ *является измеримой по Лебегу на* $\mathbf{R}$.

Доказательство. Необходимость. Если (V_n) – базис из уравновешенных множеств такой, что $V_{n+1}+V_{n+1}\subset V_n$ $(n\in\mathbf{N})$, то, согласно [252], положим

$$d(x)=\begin{cases}\inf\{p_H : x\in V_n\}, & x\in\bigcup_{H\subset\mathbb{N}}V_H,\\ 1, & x\in X\backslash\bigcup_{H\subset\mathbb{N}}V_H,\end{cases}$$

где $V_H=\sum_{h\in H}V_h$, $p_H=\sum_{h\in H}2^{-h}$, $H\subset\mathbf{N}$ – непустое конечное множество. Тогда $d=d(x)$ – ассоциированный функционал, задающий топологию τ, для которого выполнены условия (a) и (b) из (11). Пусть $x\in X$ и $x(t)=d(tx)$ $(t\in\mathbf{R})$. Ясно, что функция $x(t)$ неотрицательная, полуаддитивная, симметричная, монотонно неубывающая на $\mathbf{R}^+$ и, следовательно, измеримая по Лебегу на $\mathbf{R}$.

Достаточность. Пусть $d=d(x)$ – ассоциированный функционал на X, задающий топологию τ, симметричный, полуаддитивный и такой, что для $\lambda\in\mathbf{R}$ выполнено $\lim_{x\to 0}d(\lambda x)=0$, а для каждого $x\in X$ функция $\mu(t,x)=d(tx)$, измеримая по Лебегу на $\mathbf{R}$. Покажем, что выполнено соотношение $\lim\limits_{x\to 0,t\to 0}d(t,x)=0$. Пусть $x_k\to 0$ в (X,τ), $\epsilon>0$ и

$$M_n=\left\{t\in\mathbf{R} : \exists\, k \text{ s.t. } \mu(t,x_k)\leq\epsilon \ \text{ и } d(x_k)<\frac{1}{n}\right\}\quad (n\in\mathbf{N}).$$

Ясно, что

$$\mathbf{R}=\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n\quad \text{ и }\quad M_n=\bigcap_{d(x_k)<1/n}\{t\in\mathbf{R} : \mu(t,x_k)\leq\epsilon\}$$

для каждого $n=1,2,\ldots$. Тогда каждое множество M_n $(n\in\mathbf{N})$ измеримо по Лебегу и, следовательно, найдется $n_0\in\mathbf{N}$ такой, что $\nu(M_{n_0})>0$, где ν – мера Лебега на $\mathbf{R}$. Теперь в силу теоремы 2 из [75. С. 72] существует окрестность нуля W в $\mathbf{R}$ такая, что $W \subset M_{n_0} - M_{n_0}$. Тем самым, для $k > k_{n_0}$ и $t \in W$ выполнено $\mu(t, x_k) \leq 2\epsilon$. Так как $\epsilon > 0$ было выбрано для последовательности $x_k \to 0$ произвольно, то последнее неравенство означает, что $\lim\limits_{x\to 0, t\to 0} d(tx) = 0$. Последнее соотношение означает существование базиса окрестностей нуля в (X, τ), состоящего из уравновешенных множеств. Теорема доказана.

Нетрудно видеть, что в теореме измеримость по Лебегу может быть заменена борелевостью функций $d(tx)$ для каждого $x \in X$. Однако предположение счетной полуаддитивности функций, вообще говоря, не корректно, как показывает следующий

Пример 3.16. Пусть

$$f(t) = \begin{cases} |t|, & t \in \mathbf{Q}, \\ |t| + 1, & t \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Ясно, что f – неотрицательная, полуаддитивная, борелевская функция на $\mathbf{R}$ такая, что f^* – непрерывная функция. Однако f не является счетно-полуаддитивной функцией на $\mathbf{R}$, так как в противном случае, в силу теоремы 1 из [198] было бы выполнено $f = f^*$, что не имеет места.

3.5.4. Некоторые функционально-аналитические методы и теория меры

Использование функционально-аналитических методов в теории меры и интеграла (см. Бурбаки Н.) позволяет развивать теорию интегрирования относительно положительной меры Радона на топологическом пространстве. Существенно, что при таком подходе интеграл появляется раньше меры как счетно-аддитивной функции множества. В то же время основная идея продолжения меры с полукольца на σ-алгебру множеств несет в себе явные черты замыкания в ассоциированной с σ-алгеброй группе, наделенной согласованной топологией (или псевдотопологией). В настоящем параграфе вводится и исследуется ряд псевдотопологий на коммутативной группе $\mathfrak{B}$, ассоциированной с σ-алгеброй множеств, с помощью которых описывается универсально слабая сходимость в $\mathfrak{B}$. Основная идея продолжения меры реализуется с помощью теории счетно-полуаддитивных функционалов на топологической группе [198].

Универсальная слабая сходимость

Пусть $(X, \mathfrak{B}, m)$ – измеримое пространство с неотрицательной счетно-аддитивной конечной мерой m, где $\mathfrak{B}$ – σ-алгебра $\mathfrak{B}$-измеримых подмножеств $A \subset X$. Множество $\mathfrak{B}$ становится абелевой группой, если операцию сложения определить следующим образом: $A_1 + A_2 = A_1 \triangle A_2$, где $A_1, A_2 \in \mathfrak{B}$ и $\triangle$ – знак симметрической разности. Нулевым элементом группы является пустое множество $\emptyset$, противоположным элементом группы данному $A \in \mathfrak{B}$ является само множествоA. Если $F = \{A \in \mathfrak{B} : m(A) = 0\}$, то $\mathfrak{B}/F$ становится абелевой группой, где групповая операция единственным образом индуцируется из $\mathfrak{B}$. Элементы группы $\mathfrak{B}/F$ будем обозначать $\overline{A}$, где $A \in \mathfrak{B}$ и $A \in \overline{A}$. Ясно, что неотрицательный функционал $||A|| = m(A)$, определенный на $\mathfrak{B}$, является полуаддитивным и симметричным, и, следовательно, определяет топологическую группу $(\mathfrak{B}, \tau_m)$, вообще говоря, неотделимую, со счетным базисом окрестностей нуля

$$V_n = \left\{A \in \mathfrak{B} : m(a) < \frac{1}{n}\right\} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Неотрицательный функционал $||\overline{A}|| = m(A)$, где $A \in \overline{A}$, определенный на $\mathfrak{B}/F$ является квазинормой. Пространство $(\mathfrak{B}/F, ||\,.\,||)$ будет метрическим, если расстояние ρ ввести следующим образом: $\rho(\overline{A_1}, \overline{A_2}) = ||\overline{A_1} + \overline{A_2}||$. Метрическое пространство $(\mathfrak{B}/F, \rho)$ является полным (см., например, [60]). Топологические группы $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}/F$ будем называть *ассоциированными с σ-алгеброй $\mathfrak{B}$ по мере m.*

Известно далее, что если $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} A_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n$ (теоретико-множественный предел), где $A_n \in \mathfrak{B}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то $m(A) = \lim\limits_{n\to\infty} m(A_n)$ (так называемое усиленное свойство непрерывности). Ниже строится отделимая инвариантная относительно сдвигов топология $\hat{\tau}$ на $\mathfrak{B}$ с базисом симметричных окрестностей нуля, определяющая универсально слабую сходимость так, что универсально слабо сходящаяся последовательность множеств (теоретико-множественная сходимость) в $\mathfrak{B}$ сходится в топологии τ_m для любой неотрицательной конечной меры m на $\mathfrak{B}$.

Пусть Ω – направленное множество и A_α $(\alpha \in \Omega)$ – семейство подмножеств X. *Верхним пределом* $\varlimsup\limits_{\alpha\in\Omega} A_\alpha$ *of the семейства* (A_α) назовем множество

$$A^* = \{x \in X \,:\, x \in A_\alpha \quad (\forall \alpha \in \Omega_x)\},$$

где Ω_x – кофинальное подмножество Ω. *Нижним пределом* $\underline{\lim}_{\alpha\in\Omega} A_\alpha$ *семейства* (A_α) назовем множество

$$A_* = \{x \in X \, : \, x \in A_\alpha \quad (\forall \alpha \geq \alpha_x)\}.$$

Ясно, что $A_* \subset A^*$, и при наличии счетного кофинального множества Ω приходим к обычному определению нижнего и верхнего пределов последовательностей множеств [240]. Привлекая теоретико-множественные операции, получим равенства

$$A^* = \bigcap_{\alpha'\in\Omega} \bigcup_{\alpha\geq\alpha'} A_\alpha, \qquad A_* = \bigcup_{\alpha'\in\Omega} \bigcap_{\alpha\geq\alpha'} A_\alpha.$$

Назовем семейство (A_α) *сходящимся*, если $A^* = A_*$ и $\lim_{\alpha\in\Omega} A_\alpha$, а саму сходимость семейства (A_α) *универсально слабой*. Покажем, что введенные выше понятия нетривиальны.

Пример 3.17. Пусть (Y, τ) – пространство Суслина [199]. То есть, в частности,

$$Y = \bigcup_{\nu\in\mathcal{N}^*} \bigcap_{k=1}^{\infty} Y_{n_1 n_2 \ldots n_k},$$

где $\mathcal{N}^*$ – пространство Гэра всех последовательностей $(n_1, n_2, \ldots)$ натуральных чисел и каждое пространство $Y_\nu = \bigcap_{k=1}^{\infty} Y_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ $(\nu \in \mathcal{N}^*)$ является пространством Фреше в проективной топологии, непрерывно вложенным в (Y, τ). Введем частичный порядок на $\mathcal{N}^*$ следующим образом:

$$\nu_1 \prec v_2 \quad \text{если и только если} \quad Y_{\nu_1} \subset Y_{\nu_2}.$$

Направленность частичного порядка сразу следует из теоремы о замкнутом графике, поэтому $Y = \underline{\lim}_{\nu\in\mathcal{N}^*} Y_\nu = \overline{\lim}_{\nu\in\mathcal{N}^*} Y_\nu$. Если теперь взять в качестве Y пространство распределений Шварца $\mathcal{D}'(S)$ с сильной топологией, где S открытое подмножество в $\mathbf{R}^n$, то Y не покрывается никакой последовательностью пространств Фреше [168] и, следовательно, $(\mathcal{N}^*, \prec)$ не может иметь счетного кофинального пожмножества.

Предложение 3.18. *Пусть* $\mathfrak{B}$ *–* σ*-алгебра подмножеств* $A \subset X$*. Тогда универсально слабая сходимость в ассоциированной группе* $\mathfrak{B}$ *порождается отделимой топологией ТГ на* $\mathfrak{B}$*.*

Доказательство. Обозначим через $M = M(X, \mathfrak{B})$ линейное пространство ограниченных измеримых относительно $\mathfrak{B}$ функций $\phi : X \to$

$\mathbf{R}$, а через M^* – алгебраически сопряженное пространство линейных функционалов на M. Пусть $\mathcal{L}$ – линейная оболочка функционалов $f_x : \phi \mapsto \phi(x)$ $(x \in X)$ в M^*. Тогда $\mathcal{L} \subset M^*$ и двойственность $< M, \mathcal{L} >$ порождает на M отделимую слабую топологию $\sigma(M, \mathcal{L})$. Базис $\mathcal{U}$ окрестностей нуля топологии $\sigma(M, \mathcal{L})$ определяется следующим образом: $U \in \mathcal{U}$ означает, что найдутся $k \in \mathbf{N}$, $\epsilon_i > 0$ и $f_i \in \mathcal{L}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ такие, что

$$U = \{\phi \in M : |f_i(\phi)| < \epsilon_i, \ i = 1, 2, \ldots, k\}.$$

Теперь базис $\mathcal{V}$ симметричных окрестностей нуля V в группе $\mathfrak{B}$ определим соотношениями

$$V = \{A \in \mathfrak{B} : |f_i(\phi_A)| < \epsilon_i, \ i = 1, 2, \ldots, k\},$$

где ϕ_A – характеристическая функция множества $A \in \mathfrak{B}$. Обозначим через $\hat{\tau}$ отделимую инвариантную относительно сдвигов топологию на $\mathfrak{B}$ с базисом окрестностей нуля $\mathcal{V}$. Ясно, что $(\mathfrak{B}, \hat{\tau})$ – топологическая группа. Покажем, что топология $\hat{\tau}$ определяется универсально слабой сходимость. Пусть $A = \lim\limits_{\alpha \in \Omega} A_\alpha$ $(A, A_\alpha \in \mathfrak{B})$. Тогда $\phi_A(x) = \lim\limits_{\alpha \in \Omega} \phi_{A_\alpha}(x)$ для каждого $x \in X$. В самом деле, если $x \in A$, то $\phi_A(x) = 1$ и $\phi_{A_\alpha}(x) = 1$ для $\alpha \geq \alpha_x$, если же $x \in X \backslash A$, то $\phi_A(x) = 0$ и найдется $\alpha_0(x) \in \Omega$ такой, что для всех $\alpha \geq \alpha_0(x)$ имеем $\phi_{A_\alpha}(x) = 0$, т.к. иначе существовало бы кофинальное подмножество $\Omega_x \subset \Omega$ такое, что $\phi_{A_\alpha}(x) = 1$ $(\alpha \in \Omega_x)$ или $x \in A$, что невозможно. Тем самым, сеть (ϕ_{A_α}) сходится к ϕ_A в слабой топологии $\sigma(M, \mathcal{L})$ и, следовательно, (A_α) сходится к A в топологии $\hat{\tau}$. Так как сеть (ϕ_α) $(\alpha \in \Omega)$ сходится к ϕ в $\sigma(M, \mathcal{L})$ если и только если $\phi(x) = \lim\limits_{\alpha \in \Omega} \phi_\alpha(x)$ для каждого $x \in X$, то универсально слабая сходимость определяет топологию $\hat{\tau}$. Предложение доказано.

Легко видеть, что топологию $\sigma(M, \mathcal{L})$ можно интерпретировать как индуцированную топологией произведения $\prod_{x \in X} \mathbf{R}_x$, $\mathbf{R}_x = \mathbf{R}$ $(x \in X)$ на пространстве M. Следующий пример показывает, что топология $\hat{\tau}$, вообще говоря, неметризуемая.

Пример 3.19. Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ σ-кольцо $\mathfrak{R}$ не более чем счетных подмножеств S. Это семейство можно индексировать множеством Ω мощности континуума и определить направленность в Ω, считая $\alpha \prec \beta$, если и только если $S_\alpha \subset S_\beta$. Тогда $[0, 1] = \lim\limits_{\alpha \in \Omega} S_\alpha$ и невозможно выделить счетное кофинальное подсемейство Ω с таким же пределом. В то же время сеть (S_α) универсально слабо сходится к $[0, 1]$

в топологии $\hat{\tau}$ на ассоциированной группе $\mathfrak{B}$ измеримых по Лебегу подмножеств отрезка $[0,1]$, поэтому базис $\mathcal{V}$ топологии $\hat{\tau}$ также не имеет счетного кофинального подсемейства.

Топология $\hat{\tau}$ будет, например, метризуемой, если положить $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, $\mathfrak{B}$ совпадает с булаеном $\beta(X)$ множества X. Тогда $M(X, \mathfrak{B})$ n-мерное линейное пространство, $\mathcal{L} = M^*$ и $\sigma(M, \mathcal{L})$ – отделимая нормальная топология; сходимость в $(M, \sigma(M, \mathcal{L}))$ – покоординатная, поэтому топология $\hat{\tau}$ дискретная. Геометрически группу $\mathfrak{B}$ можно интерпретировать как вершины n-мерного параллелепипеда, построенного на координатных ортах.

Предложение 3.20. *Пусть* $\mathfrak{B}$ *–* σ*-алгебра множеств и* τ_m *– топология на ассоциированной группе* $\mathfrak{B}$*, порожденная неотрицательной конечной мерой* m*. Тогда топологии* $\hat{\tau}$ *и* τ_m *на* $\mathfrak{B}$*,вообще говоря, несравнимы.*

Действительно, если в примере 3.19 μ – мера Лебега на $[0,1]$, то $\lim\limits_{\alpha \in \Omega} \mu(S_\alpha) = 0$, в то время как $\mu([0,1]) = 1$.

Тем не менее, универсально слабо сходящаяся последовательность множеств из $(\mathfrak{B}, \hat{\tau})$ сходится в топологии τ_m. В частности, если $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ и $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, то ряд $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ универсально слабо сходится в $(\mathfrak{B}, \hat{\tau})$, причем $m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$. Отметим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots$ ассоциированной группы $\mathfrak{B}$ универсально слабо сходится, если и только если $\lim\limits_{n \to \infty} A_n = 0$ (Е. Бишоп, [240. С. 24]).

Предложение 3.21. *Пусть* $(X, \mathfrak{B}, m)$ *– измеримое пространство с конечной мерой* m*. Тогда ТГ* $(\mathfrak{B}, \tau_m)$ *является полной полуметрической группой.*

Доказательство. Ясно, что функционал $\rho(A_1, A_2) = m(A_1 \triangle A_2)$, где $A_1, A_2 \in \mathfrak{B}$, является полуметрикой на $\mathfrak{B}$, инвариантной относительно сдвигов, и задает равномерную структуру на $\mathfrak{B}$, база окружений которой состоит из множеств $Q_\epsilon = \{(A_1, A_2) : \rho(A_1, A_2) < \epsilon\}$ $(\epsilon > 0)$. Пусть (A_n) – последовательность из $\mathfrak{B}$ такая, что $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < +\infty$. Для установления полноты $(\mathfrak{B}, \tau_m)$ достаточно найти $A \in \mathfrak{B}$ такое, что $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ в $(\mathfrak{B}, \tau_m)$. Положим

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{i \neq j} (A_i \cap A_j).$$

Ясно, что $A \in \mathfrak{B}$ и имеют место включения ($n = 1, 2, \ldots$):

$$A \triangle (A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_n) = A \triangle \Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \setminus \bigcup_{i \neq j}^{n} (A_i \cap A_j) \Big) \subset \bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i \,;$$

поэтому

$$\rho(A, \sum_{i=1}^{n} A_i) = m\Big(A \triangle (\overset{n}{\underset{i=1}{\triangle}} A_i) \Big) \leq m\Big(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i \Big) \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} m(A_i).$$

Так как ряд справа есть остаток сходящегося положительного ряда, то $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ в $(\mathfrak{B}, \tau_m)$. Предложение доказано.

Псевдотопологии и универсальная слабая сходимость

В дальнейшем нас будет интересовать вопрос об описании универсально слабой сходимости последовательностей $\mathfrak{B}$-измеримых множеств из X метризуемой топологией (или псевдотопологией). Те σ-алгебры $\mathfrak{B}$, которые допускают описание универсально слабой сходимости последовательностей метризуемой топологией, будем называть *универсальными*.

Пример 3.22. Пусть $X = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, $\mathfrak{B} = \beta(X)$ и M – линейное пространство всех ограниченных последовательностей $\phi = (\xi_n)$ действительных чисел. Тогда неотрицательный, симметричный, полуаддитивный функционал

$$p(\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|\xi_n|}{1 + |\xi_n|}$$

определяет линейную топологию на M со счетным базисом окрестностей нуля и покоординатную сходимость в (M, p). Поэтому соотношение $\hat{p}(A) = p(\phi_A)$, где ϕ_A – характеристическая функция, $A \in \mathfrak{B}$, превращает $\mathfrak{B}$ в метрическую группу, описывающую универсально слабую сходимость последовательностей $\mathfrak{B}$-измеримых множеств. Тем самым, $\beta(X)$ – универсальная σ-алгебра.

Следующее предложение показывает, что для несчетных множеств X σ-алгебры $\mathfrak{B}$, вообще говоря, не являются универсальными.

Предложение 3.23. *Пусть X – несчетное множество и $\mathfrak{B}$ – σ-алгебра подмножеств $A \subset X$, содержащая не более чем счетные множества. Тогда ассоциированная группа $\mathfrak{B}$ не является универсальной.*

Доказательство. Предположим, что $\mathfrak{B}$ – универсальная группа. Тогда существует базис $\mathcal{V}$ симметричных окрестностей нуля (V_n) такой, что $V_{n+1}+V_{n+1}\subset V_n$ $(n\in\mathbf{N})$, описывающий универсально слабую сходимость последовательностей. Так как $\mathfrak{B}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{B}\backslash V_n)$ в силу отделимости $\mathcal{V}$ и множество $X_0=\bigcup_{x\in X}\{x\}$ имеет несчетную мощность, то найдется номер $N\in\mathbf{N}$ такой, что $X_0\cap(\mathfrak{B}\backslash V_N)$ является бесконечным множеством. Выбирая теперь последовательность одноэлементных множеств $\{x_n\}\in\mathfrak{B}\backslash V_N$, получим универсально слабую сходящуюся к нулю последовательность, что невозможно. Значит, $\mathfrak{B}$ не является универсальной группой. Предложение доказано.

Оказывается, что универсально слабая сходимость последовательности может быть описана псевдотопологией. Напомним, [236] что псевдотопология на пространстве E определяется заданием для каждого $x\in E$ некоторого семейства фильтров в E, называемых "сходящимися к x". Эти семейства должны удовлетворять следующим аксиомам:

(1) если фильтр сходится к x, то к x сходится и любой меньший фильтр;

(2) если два фильтра сходятся к x, ток x сходится и их верхняя грань;

(3) фильтр $[x]$, состоящий из всех подмножеств E, содержащих точку x, сходится к x.

Псевдотопология *псевдотопологического линейного пространства* E определена, если известны фильтры, сходящиеся к нулю, обычно пишут $\mathcal{X}\downarrow E$, когда фильтр $\mathcal{X}$ сходится к нулю в E. При этом непрерывность алгебраических операций означает выполнение дополнительных аксиом:

(4) $(\mathcal{X}_1\downarrow E)\wedge(\mathcal{X}_2\downarrow E)\ \Rightarrow\ (\mathcal{X}_1+\mathcal{X}_2\downarrow E)$;

(5) $(\mathcal{X}\downarrow E)\wedge(\lambda\in\mathbf{R})\ \Rightarrow\ (\lambda\mathcal{X}\downarrow E)$;

(6) $(\mathcal{X}\downarrow E)\wedge(\lambda\to 0)\ \Rightarrow\ (\lambda\mathcal{X}\downarrow E)$;

(7) $(x\in E)\wedge(\lambda\to 0)\ \Rightarrow\ (\lambda x\downarrow E)$.

Каждое топологическое линейное пространство E является псевдотопологическим, если положить $\mathcal{X}\downarrow E$, если и только если $\mathcal{X}\leq\mathcal{U}$, где $\mathcal{U}$ – фильтр окрестностей нуля в E.

Пусть M – линейное пространство ограниченных $\mathfrak{B}$-измеримых функций на X. Введем на M локально выпуклые топологии со счетным базисом окрестностей нуля следующим образом. Пусть T обозначает множество всех $\xi=(B_1,B_2,\ldots)$, где $B_n\in\mathfrak{B}$ $(n=1,2,\ldots)$ и $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$. Для $n=1,2,\ldots$ и $\xi\in T$ положим

$$\rho_n^{\xi}(\phi)=\sup_{x\in B_n}|\phi(x)|\quad(\phi\in M).$$

Тогда псевдонормы

$$\rho_\xi(\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\rho_n^\xi(\phi)}{1 + \rho_n^\xi(\phi)} \quad (\xi \in T)$$

задают искомые топологии на M; обозначим эту топологию через $\tau(\xi)$. Ясно, что сходимость в $(M, \tau(\xi))$ означает равномерную поточечную сходимость на каждом множестве B_n $(n \in \mathbf{N})$ и топология $\tau(\xi)$ сильнее топологии $\sigma(M, \mathcal{L})$ для всех $\xi \in T$. Каждый фильтр $\mathcal{X}_\xi$ $(\xi \in T)$ окрестностей нуля в пространствах $(M, \tau(\xi))$ имеет счетный базис (V_n^ξ), состоящий из уравновешенных, поглощающих в M множеств таких, что $V_{n+1}^\xi + V_{n+1}^\xi \subset V_n^\xi$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Легко проверить, что набор $\{\mathcal{X}_\xi : \xi \in T\}$ определяет псевдотопологию ∇ уравновешенного псевдотопологического линейного пространства (M, ∇). С другой стороны, семейство псевдонорм $\{\rho_\xi : \xi \in T\}$ позволяет описать псевдотопологию ∇, именно, $\phi_n \to \phi$ $(n \to \infty)$ в ∇ означает существование $\xi \in T$ такого, что $\rho_\xi(\phi_n - \phi) \to 0$ $(n \to \infty)$. Теперь для ассоциированной группы $\mathfrak{B}$ набор неотрицательных, симметричных, полуаддитивных функционалов $\hat{\rho}_\xi(A) = \rho_\xi(\phi_A)$ $(\xi \in T)$, где $A \in \mathfrak{B}$, определяет псевдотопологическую группу $(\mathfrak{B}, \nabla)$. Ясно, что для того, чтобы неотрицательный, полуаддитивный функционал f был непрерывен на $(\mathfrak{B}, \nabla)$, необходимо и достаточно, чтобы был непрерывен в нуле на каждой МГ $(\mathfrak{B}, \hat{\rho}_\xi)$ $(\xi \in T)$.

Предложение 3.24. *Универсально слабая сходимость последовательностей в ассоциированной с σ-алгеброй $\mathfrak{B}$ группе определяется сходимостью в псевдотопологической группе* $(\mathfrak{B}, \nabla)$.

Доказательство. Пусть последовательность (A_n) $\mathfrak{B}$-измеримых множеств универсально слабо сходится к $A \in \mathfrak{B}$, $A \subset X$. Так как универсально слабая сходимость инвариантна относительно сдвигов в ассоциированной группе $\mathfrak{B}$, то можно считать, что $A = \emptyset$. Таким образом, $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n = \emptyset$ и последовательность (ϕ_{A_n}) характеристических функций сходится поточечно к нулю на X. Положим

$$X_k^m = \left\{ x \in X : |\phi_{A_i}(x)| < \frac{1}{m+1} \quad (i \geq k) \right\}.$$

Тогда множества X_k^m являются $\mathfrak{B}$-измеримыми и $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k^m$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Ясно, что $X_k^m = X_k^l$ $(m, l \in \mathbf{N})$ и $X_1^m \subset X_2^m \subset \ldots \subset X_k^m \subset \ldots$ так, что последовательность (ϕ_{A_n}) равномерно сходится на каждом множестве $X_k^m = B_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Тем самым, последовательность (ϕ_{A_n})

сходится к нулю в МЛП (M, ρ_ξ), где $\xi = (B_1, B_2, \ldots)$, поэтому (ϕ_{A_n}) сходится к нулю в (M, ∇) и, следовательно, последовательность (A_n) сходится к нулю в $(\mathfrak{B}, \nabla)$.

Обратно, пусть последовательность (A_n) сходится у нулю в $(\mathfrak{B}, \nabla)$. Это означает, что существует $\xi = (B_1, B_2, \ldots)$ и разложение $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ $\mathfrak{B}$-измеримыми множествами B_n $(n = 1, 2, \ldots)$ такое, что фильтр $\mathcal{X}_\xi$ псевдотопологии ∇ больше элементарного фильтра сечений последовательности (ϕ_{A_n}). Последнее дает возможность заключить, что (ϕ_{A_n}) равномерно сходится к нулю на каждом множестве B_n $(n = 1, 2, \ldots)$. В частности, (ϕ_{A_n}) сходится поточечно к нулю на X и, следовательно, существует $\lim_{n\to\infty} A_n = \emptyset$. Отсюда следует, что последовательность (A_n) универсально слабо сходится. Предложение доказано.

Псевдотопологии в теории меры

Пусть $\mathfrak{B}$ – σ-алгебра множеств $A \subset X$. Последнее описание псевдотопологией $(\mathfrak{B}, \hat{\rho}_\xi)$ $(\xi \in T)$ универсально слабой сходимости последовательностей из $\mathfrak{B}$ вместе с теоремой 3.10 для метрических групп позволяет реализовать основную идею продолжения меры с полукольца на σ-алгебру множеств функционально-аналитическим методом. Так как распространение меры с полукольца на кольцо (с единицей) и переход от конечной меры к σ-конечной тривиален, то будем рассматривать случай, когда мера m задана и конечна на алгебре множеств $\mathfrak{R}$ некоторого непустого множества X. Переходя к ассоциированным группам $\mathfrak{R} \subset \beta(X)$, где $\beta(X)$ i– булеан множества X, будем рассматривать различные инвариантные относительно сдвигов псевдотопологии ν в $\beta(X)$.

(a) **Распространение меры m на минимальную σ-алгебру, содержащую $\mathfrak{R}$.** Пусть $\nu = \nabla$, $\mathfrak{B}$ – замыкание $\mathfrak{R}$ в псевдотопологии ∇ на $\beta(X)$ и $m^*_\xi(A) = \inf\limits_{A_n \to A} \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, m(A_n)$, где $A_n \to A$ $(n \to \infty)$ в пространстве $(\beta(X), \rho_\xi)$ $(\xi \in T)$. Областью неотрицательного, полуаддитивного функционала m^*_ξ является группа $\mathfrak{B}_\xi$, замыкание в $(\beta(X), \hat{\rho}_\xi)$ группы $\mathfrak{R}$ $(\xi \in T)$. Ясно, что $\mathfrak{B} = \bigcup_{\xi\in T} \mathfrak{B}_\xi$ и $m^*_\xi|_{\mathfrak{R}} = m$ для всех $\xi \in T$. Пусть $\xi_0 \in T$ и $\xi_0 = (B_1^\circ, B_2^\circ, \ldots)$. Покажем непрерывность $m^*_{\xi_0}$ на $(\mathfrak{B}_{\xi_0}, \hat{\rho}_{\xi_0})$. В силу полуаддитивности функционала $m^*_{\xi_0}$ доказательство достаточно провести в нуле. Пусть $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$ в псевдонорме $\hat{\rho}_{\xi_0}$ и $\epsilon_0 > 0$. Выберем диагональную последовательность $(A_n^{m_n})$ в $\mathfrak{R}$ так, что $A_n = \lim\limits_{m\to\infty} A_n^m$ и $\lim\limits_{n\to\infty} A_n^{m_n} = 0$ в псевдонорме $\hat{\rho}_{\xi_0}$ и $m^*_{\xi_0}(A_n) \leq m(A_n^{m_n}) + \frac{\epsilon_0}{2}$. Теперь в силу непрерывности m на $(\mathfrak{R}, \nabla)$ найдется номер $n_0 \in \mathbf{N}$ такой, что

$m(A_n^{m_n}) < \frac{\epsilon_0}{2}$ $(n > n_0)$. Тем самым $m^*_{\xi_0}(A_n) < \epsilon_0$ $(n > n_0)$ и функционал $m^*_{\xi_0}$ непрерывен в нуле на $(\mathfrak{B}_{\xi_0}, \hat{\rho}_{\xi_0})$. Пусть далее $\mathfrak{R}_{\xi_0} \supset \mathfrak{R}$ – максимальная алгебра, на которой $m^*_{\xi_0}$ конечно аддитивен (существование вытекает из леммы Цорна), и введем в рассмотрение функционал μ_{ξ_0}, такой, что $\mu_{\xi_0}(A) = m^*_{\xi_0}(A)$ $(A \in \mathfrak{R}_{\xi_0})$ и $\mu_{\xi_0}(A) = +\infty$ $(A \in \mathfrak{B}_{\xi_0} \backslash \mathfrak{R}_{\xi_0})$. Покажем счетную полуаддитивность функционала μ_{ξ_0} на $(\mathfrak{B}_{\xi_0}, \hat{\rho}_{\xi_0})$, т.е. из условий $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_{\xi_0}(A_n) < +\infty$ должно вытекать неравенство $\mu_{\xi_0}(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{\xi_0}(A_n)$, в частности, $A \in \mathfrak{R}_{\xi_0}$. Последнее будет иметь место, если для каждого $B \in \mathfrak{R}_{\xi_0}$ такого, что $A \cap B = \emptyset$ выполнено соотношение $m^*_{\xi_0}(A \cup B) = m^*_{\xi_0}(A) + m^*_{\xi_0}(B)$. В самом деле, если $S_n = A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_n$, то $S_n \in \mathfrak{R}_{\xi_0}$ $(n \in \mathbf{N})$ и $\lim\limits_{n\to\infty} m^*_{\xi_0}(S_n \triangle A) = 0$. Теперь в силу непрерывности $m^*_{\xi_0}$ получим

$$\begin{aligned} m^*_{\xi_0}(A \cup B) &= \lim_{n\to\infty} m^*_{\xi_0}(S_n \cup B) \\ &= \lim_{n\to\infty}[m^*_{\xi_0}(S_n) + m^*_{\xi_0}(B) - m^*_{\xi_0}(S_n \cap B)] \\ &\geq \lim_{n\to\infty}[m^*_{\xi_0}(S_n) + m^*_{\xi_0}(B) - m^*_{\xi_0}((S_n \triangle A) \cap B)] \\ &= m^*_{\xi_0}(A) + m^*_{\xi_0}(B). \end{aligned}$$

Значит, $A \in \mathfrak{R}_{\xi_0}$ и функционалμ_{ξ_0} счетно-полуаддитивен в смысле [198] на $(\mathfrak{B}_{\xi_0}, \hat{\rho}_{\xi_0})$. Так как $\mu^*_{\xi_0} = m^*_{\xi_0}$ всюду на $\mathfrak{B}_{\xi_0}$, то в силу теоремы 3.10 справедливо равенство $\mu_{\xi_0}(A) = m^*_{\xi_0}(A)$ для всех $A \in \mathfrak{B}_{\xi_0}$. В частности, $\mathfrak{R}_{\xi_0} = \mathfrak{B}_{\xi_0}$ и функция множества μ_{ξ_0} счетно-аддитивна на $\mathfrak{B}_{\xi_0}$.

Рассмотрим теперь семейство функционалов $\{\mu_\xi : \xi \in T\}$ таких, что $\mu_\xi|_{\mathfrak{R}} = m$ и соответствующие функции множества счетно-аддитивны на алгебрах $\mathfrak{B}_\xi$ $(\xi \in T)$. Так как семейство $\{\mathfrak{B}_\xi : \xi \in T\}$ направлено по включению и функционалы μ_ξ непрерывны на $(\mathfrak{B}_\xi, \hat{\rho}_\xi)$, для любых $\mathfrak{B}_{\xi'}$, $\mathfrak{B}_{\xi''}$ найдется $\mathfrak{B}_{\xi'''}$ такая, что $\mathfrak{B}_{\xi'} \subset \mathfrak{B}_{\xi'''}$ и $\mathfrak{B}_{\xi''} \subset \mathfrak{B}_{\xi'''}$ и более того $\mu_{\xi'''}|_{\mathfrak{B}_{\xi'}} = \mu_{\xi'}$ и $\mu_{\xi'''}|_{\mathfrak{B}_{\xi''}} = \mu_{\xi''}$. Теперь функционал m^*, определенный равенством

$$m^*(A) = \inf_{A_n \to A} \varliminf_{n\to\infty} m(A_n),$$

где (A_n) сходится к A в псевдотопологии ∇, конечно аддитивен на $\mathfrak{B}$ по построению,

$$m^*(A) = \inf_{\xi \in T} m^*_\xi(A), \quad m^*|_{\mathfrak{R}} = m,$$

и, следовательно, соответствующая функция множества m^* счетно-аддитивный на σ-алгебре $\mathfrak{B}$. Минимальность σ-алгебры $\mathfrak{B}$ очевидна по построению.

(b) **Стандартное распространение нормы m.** Пусть

$$\hat{\mu}(D) = \inf_{D \subset \bigcup A_n} \sum_n m(A_n) \quad (D \in \beta(X))$$

внешняя мера такая, что $\hat{\mu}|_{\mathfrak{R}} = m$. Тогда $\hat{\mu}$ определяет на $\beta(X)$ топологию $\tau(\hat{\mu})$ со счетным базисом окрестностей нуля и инвариантную относительно сдвигов в ассоциированной группе $\beta(X)$; положим $\nu = \tau(\hat{\mu})$. Обозначим через $\hat{\mathfrak{B}}$ замыкание $\mathfrak{R}$ в $(\beta(X), \nu)$ и через $\hat{\mathfrak{R}} \supset \mathfrak{R}$ максимальную алгебру, на которой $\hat{\mu}$ конечно аддитивен; и положим $\mu(A) = \hat{\mu}(A)$ $(A \in \hat{\mathfrak{R}})$ и $\mu(A) = +\infty$ $(A \in \hat{\mathfrak{B}} \backslash \hat{\mathfrak{R}})$. Непрерывность $\hat{\mu}$ на $(\hat{\mathfrak{B}}, \nu)$ очевидна, счетная полуаддитивность функционала μ доказывается аналогично предыдущему рассмотрению в (a). Значит, в силу теоремы 3.10. получим равенство $\mu = \hat{\mu}$ на $\hat{\mathfrak{B}}$, откуда и следует счетная аддитивность соответствующей функции множества $\mu = \mu(A)$, где $A \in \hat{\mathfrak{B}}$. Ясно, что μ – полная конечная мера на σ-алгебре $\hat{\mathfrak{B}}$.

3.6. Наглядное моделирование в прикладных задачах математики

Человек, который знаком с математикой и который однажды, положив перед собой чистый лист бумаги, пожелал придумать хоть какую-нибудь арифметическую или геометрическую задачу, напоминает сказочного персонажа, которому высочайше приказано: “*Пойди туда, не знаю куда! Принеси то, не знаю что*!” А чтобы не кручиниться и не печалиться от обилия неопределенностей подобного Указа, он должен вооружиться некой идеей и, следуя ей до конца, сначала вспомнить простейшую школьную задачу, попытаться подметить в ней некие закономерности и составить текст математической задачи. Если удастся сформулировать задачу, ее следует постараться решить, а затем, варьируя условие этой частной задачи, попытаться обобщить ее в различных направлениях. Но не только *обобщения* дают новые содержательные задачи, к новым, как правило, красивым задачам приводят частные случаи общей задачи – *специализации.*

Понимая, что структура любой теории состоит из понятий, утверждений, методов, мы в нашем поиске неизбежно встретимся с тем, что в одних задачах могут появиться новые понятия, в других – новые математические факты в виде теорем, уравнений, неравенств, а в третьих

– новые методы исследования, методики вычисления числовых характеристик, приемов мышления, в четвертых – различные сочетания понятий, утверждений, методов. Мы не будем ставить перед собой такой ответственной миссии, как введение нового понятия, ибо язык современной математики достаточно богат, чтобы описать любую математическую конструкцию. Тем не менее, поскольку любой язык вообще, и математический, в частности, не стоит на месте, активно развивается, а, следовательно, пополняется новыми понятиями, то нужно ли ограничивать себя запретом “не вводить новые понятия”? Математический язык состоит из предложений, фраз, слов, которые надо понимать, но кроме его *понимания*, необходимы также *знания* утверждений и *умение* применять методы исследования. Можно ничего не знать и до всего дойти самому, но, как показывает практика, что хоть что-нибудь да надо знать, например, теорему Пифагора. Развитие математического мышления сопряжено с пониманием, знаниями, умениями. Способность человека мыслить одновременно и понятиями, и образами, и символами, вскрывает сущность трех составляющих культуры: искусство, религия, наука [17]. В треугольнике Фреге

$$\text{Знак} = [\text{денотат} + \text{концепт} + \text{сигнификат}]$$

денотат – это обозначаемое; оно несет информацию, которую в сжатом, заархивированном виде символизирует Концепт = [знак + символ + миф]; сигнификат – обозначающее [*Баранцев Р. Г.* Понятия – Образы – Символы // http://www.trinitas.ru/rus/doc/0019/d01/00190005.htm].

Другими словами, концепт – это информация, ее носителем является денотат, а сигнификат эту информацию задает. Простейшим примером в математике может служить отображение $f : X \to Y$; здесь – денотат = множество прообразов, Y – концепт = множество образов, f – сигнификат = закон отображения.

Нередко простая задача решается многими методами. Эти решения могут привести к новым методам исследования в математике и, что особенно ценно, к новым методам мышления. Как человек принимает решение, под влиянием каких программ? Считается, что решение принимается под влиянием рационального и иррационального актов мышления; некоторые авторы добавляют сюда эмоциональную составляющую психических процессов. В процессе обучения учащиеся решают чаще всего задачи уже известные, предлагаемые учителем или взятые из учебников. Даже в этом случае трудно описать творческий процесс поиска решений. Еще хуже обстоит дело с поиском новых, с процессом составления оригинальных задач. Наша цель – показать некоторые приемы поиска нового, подметить элементы того мышления, которое наличествует у всех учащихся, но слабо освещено в педагогической литературе. Это мышление – мышление альтернативами на основе наглядного моделирования, а потому называемое нелинейным.

Задачи на нахождение могут быть теоретическими или практическими, отвлеченными или конкретными. Неизвестное (искомое) может быть множеством, фигурой, числом, функцией, соответствием, характеристикой, уравнением, системой уравнений или неравенств, алгоритмом, программой, выигрывающим ходом в игре. В задаче на доказательство дано МПА (М – множество, П – предикат, А – алгоритм) и требуется выяснить справедливость или ошибочность сформулированного утверждения. В задаче на нахождение дано либо ПА, либо АМ, либо МП, и требуется найти третий элемент. Задачи на составление имеют место в мыслительных процессах при решении задач на нахождение и доказательство (к ним следует отнести исследовательские задачи). В таких задачах имеется большая степень свободы, так как дано либо М, либо П, либо А. Два других элемента из МПА требуется подобрать, следуя идее. В достаточно сложных задачах приходится либо вспоминать уже известные задачи, теоремы, формулы, факты, либо самому придумывать и решать простые задачи, которые помогли бы решению данной задачи на нахождение или на доказательство. Задачи на составление сопровождают изучающих математику везде и всюду. Задачам на составление учат в школе, но явно это не подчеркивается (и порой, не понимается), тем не менее, этот важнейший акт мыслительной деятельности происходит постоянно при изучении математики, поэтому задачи на составление необходимо исследовать. *Итерация* – результат многократного применения какой-либо математической операции. “*Итерация*” означает применение функции к самой себе. Например, пусть $f : X \to X$ – отображение множества в себя, тогда последовательность

$$\begin{aligned} &f(x),\\ &f^{\circ 2}(x) = f(f(x)),\\ &f^{\circ 3}(x) = f(f(f(x))),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &f^{\circ k}(x) = \underbrace{f(f(...f}_{k}(x\underbrace{)...))}_{k\text{раз}} \end{aligned}$$

есть последовательность итераций отображения f. Число k называется *показателем итерации.* Процесс составления итерации называется *итерированием.*

Пусть $X = \mathbf{R}$ – множество всех действительных чисел, и пусть $f(x) = \sqrt{x}$. Если $x_0 = 2$, то $f(x_0) = x_1 = \sqrt{x_0}$, $f^{\circ 2}(x_0) = x_2 = \sqrt{x_1}, \dots$, $f^{\circ n}x_n = \sqrt{x_{n-1}}$. Легко видеть, что $f^{\circ n}(x_0) = x_n = 2^{1/2^n}$, $n \in \mathbf{N}$. При итерировании, как правило, возникает проблема отыскания предельного значения числа x_n при $n \to \infty$. В данном примере $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Пусть $x_0 = 2$ (впрочем, здесь можно взять любое положительное число). Построив две последовательности точек

$\{A_n\}_{n=0}^{\infty} = \{A_0(x_0,\ x_0),\ A_1(x_1,\ x_1), \dots, A_n(x_n,\ x_n), \dots\}$,

$\{B_n\}_{n=0}^{\infty} = \{B_0(x_0,\ x_1),\ B_1(x_1,\ x_2), \dots, B_n(x_n,\ x_{n+1}), \dots\}$

и стрелок A_nB_n и B_nA_{n+1}, мы видим (рис. 42), что при бесконечном выполнении итераций точка (x_n, x_n), прыгающая по биссектрисе $y = x$, будет стремиться к точке (1;1). Это означает, что точка $x = 1$ является решением уравнения $f(x) = x$ и называется *неподвижной точкой* отображения f.

Рис. 42. Паутина

Имеются ли другие неподвижные точки отображения f?

Пусть $X = \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{2+x}$. Положив, например, $x_0 = 0$, можем записать:

$$x_1 = \sqrt{2},$$

$$x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}},$$

$$x_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$

....

$$x_{n+1} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...\sqrt{2}}}}.$$

Мы получили нетривиальную задачу олимпиадного типа: “*Найти число* $x = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...\sqrt{2+...}}}}$, *когда корней бесконечно много*”. Другими словами, требуется найти множество всех неподвижных точек отображения $f(x) = \sqrt{2+x}$. Предлагаем читателю самостоятельно решить эту задачу. Одно из решений можно получить, если увидеть, подметить, *неожиданно* обнаружить, что **часть числа** x **есть в точности само число** x. Тогда задача немедленно сводится к решению уравнения $x = \sqrt{2+x}$ при условии, что /0. Ответ: $x = 2$.

Еще пример. Пусть требуется найти значение выражения

$$x = \tfrac{1}{2} - (\tfrac{1}{2} - (\tfrac{1}{2} - (\tfrac{1}{2} - ...)^2)^2)^2.$$

Применив уже знакомый нам прием, основанный на самоподобии выражения, мы получим квадратное уравнение $x = \frac{1}{2} - x^2$ с корнями

$$p_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \quad p_2 = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Так как

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(1-x^2) = -2x$$

и

$$|\, f'(p_1)\,| = \sqrt{3} - 1 < 1, \quad |\, f'(p_2)\,| = \sqrt{3} + 1 > 1,$$

то p_1 – притягивающая неподвижная точка (*аттрактор*), а p_2 – отталкивающая неподвижная точка (*репеллер*). Рис. 43 демонстрирует паутину в окрестности аттрактора.

Рис. 43. Паутина для функции $y = 0,5 - x^2$ сходится к точке $x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

Обобщая последнюю задачу, рассмотрим функцию $f(x) = a - x^2$. Неподвижные точки функции $f(x)$ являются решениями уравнения $x = a - x^2$, которое имеет действительные решения при $a / - 1/4$. При этом условии бесконечное итерирование функции приводит к задаче: “*Найти значение выражения*

$x = a - (a - (a - (a - ...)^2)^2)^2$”,

которая имеет положительное решение $x = (\sqrt{4a+1} - 1)/2$. В частности, при $a = 1/2$ получаем предыдущую задачу.

Задачи и вопросы

1. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ записана рекуррентно:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \begin{cases} 3x_n & x_n < 1, \\ \frac{1}{2}x_n & x_n \geq 1. \end{cases}$$

Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_n)$.

2. Софизм. Докажем, что $0 = -1$. Доказательство. Пусть

$$0 - (0 - (0 - (0 - ...)^2)^2)^2 = x.$$

В силу самоподобия выражения, стоящего слева, получаем квадратное уравнение $0 - x^2 = x$, решениями которого являются числа $x_1 = 0$, $x_2 = -1$. Так как числовое выражение не может иметь более одного числового значения, то решения квадратного уравнения должны быть равны друг другу, т.е. $0 = -1$. Что и требовалось доказать.

Аттрактор

Орбитой точки $x = x_0$ *в отображении* f называется последовательность $\{x_0,\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_k,\ ...\} = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $x_n = f^{\circ n}(x_0)$. Орбита называется *циклом*, если существует натуральное число k, такое, что $f^{\circ k}(x_0) = x_0$; наименьшее число kназывается *периодом* или *порядком цикла.* В частности, если $k = 1$, то $f(x_0) = x_0$, цикл состоит из единственной точки x_0, поэтому его называют *тривиальным*; точка x_0 называется при этом *неподвижной точкой отображения* f; если $k = 2$, то $f^{\circ 2}(x_0) = f(x_1) = x_0$, цикл второго порядка $\{x_0,\ x_1\}$ называется *инволютивной парой.*

Пусть x – неподвижная точка функции f:**R**→**R**. Тогда точка называется

притягивающей, если $\mid f'(x) \mid < 1$,

отталкивающей, если $\mid f'(x) \mid > 1$ или $f'(x)$ не существует.

Если $\mid f'(x) \mid = 1$, то для выяснения поведения точек в окрестности неподвижной точки требуется дополнительное исследование.

В примере (см. рис. 42) аттрактором отображения f служит точка $x = 1$, являющаяся притягивающей неподвижной точкой, так как $|f'(1)| = \frac{1}{2} < 1$. Кроме этой точки f имеет еще одну неподвижную точку: $x = 0$; причем производная $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ в нуле не существует, поэтому $x = 0$ – отталкивающая неподвижная точка. Независимо от того, какая положительная стартовая точка x_0 взята, оказалось, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. Однако в некоторых случаях, как мы увидим в дальнейшем, такой предел может не существовать, но может существовать некое притягивающее множество или *аттрактор* (от английского *to attract* – притягиватель), к которому стремится орбита $x_0 \mapsto x_1 \mapsto x_2 \mapsto \ldots\ldots \mapsto x_k \mapsto \ldots$ Например, может оказаться, что орбита стремится к некоторому нетривиальному циклу. В наиболее интересных случаях аттрактор данной орбиты может не быть циклом и состоять из бесконечного множества точек.

Задачи и вопросы

1. Докажите, что если аттрактор отображения $f\ :\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ является точкой $x = x_0$, то x_0 – неподвижная точка f, т.е. x_0 – решение уравнения $x = f(x)$.

2. Докажите, что если орбита $x_0 \mapsto x_1 \mapsto x_2 \mapsto \ldots \mapsto x_k \mapsto \ldots$ ограничена, то она стремится к некоторому аттрактору.

3. Имеет ли центральная симметрия плоскости циклы периода 1, 2, 3?

4. Найдите неподвижные точки преобразования ζ плоскости:

$$x' = 2a - x, \quad y' = 2b - y,$$

где $a,\ b\ \in\ \mathbf{R}$. [ζ – центральная симметрия относительно точки $(a,\, b)$.]

5. Найдите неподвижные точки преобразования подобия плоскости

$$x' = k((x-a)\cos\varphi - (y-b)\sin\varphi) + a,$$

$$y' = k((x-a)\sin\varphi + (y-b)\cos\varphi) + b,$$

где $k,\ a,\ b,\ \varphi \in \mathbf{R}$.

6. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \end{vmatrix},$$

если $a_1 = 10^{15}$, $a_2 = 10^{16}$, $a_3 = 10^{17}$, $a_n = (1 + a_{n-1} + a_{n-2})/a_{n-3}$.

7. В 3-мерном арифметическом пространстве $\mathbf{R}^3$ задано отображение τ: точке $A_0 = (x_1, x_2, x_3)$ ставится в соответствие точка $A_1 = (x_2, x_3, x_4)$, где $x_4 = (1 + x_2 + x_3)/x_1$. Докажите, что $\tau^{\circ 8}$ – тождественное преобразование, т.е. общая орбита является циклом 8-го порядка: $A_0 \mapsto A_1 \mapsto \ldots \mapsto A_8 = A_0$. Имеются ли циклы порядка $d < 8$? Докажите, что при $t = 1 \pm \sqrt{2}$ точка $(t,\ t,\ t)$ является неподвижной. Докажите, что орбита точки $(\lambda,\ \frac{\lambda+1}{\lambda-1},\ \lambda)$ является инволютивной парой.

Ахилл и черепаха

Пусть расстояние между Ахиллом и черепахой равно 1. Пока Ахилл пройдет расстояние равное 1, черепаха проползет отрезок длиной q<1. Положим, скорость Ахилла равна 1, тогда за n итерационных шагов Ахилл преодолеет расстояние $R_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$ за время R_n. Ситуация, отраженная в апории Зенона, достаточно глубока. Повседневный опыт убеждает нас, что вывод Зенона ошибочен. Принято противопоставлять конечное и бесконечное, но это противоречие устраняется, если рассматривать триаду [конечное + бесконечное + предельный переход]. Зенон, обращая внимание своих современников на другую триаду [реальное явление + модель + интерпретация], показывает, что его интерпретация неверна. Парадокс легко преодолевается в современной математической модели непрерывного движения, которая, в конечном счете, сводится к выполнению в поле действительных чисел так называемой аксиомы Архимеда: для всяких действительных чисел a, $b > 0$ найдется такое натуральное число n, что $an > b$. Таким образом, применение итераций сопряжено с парадоксами, подобными апории Зенона, и мы должны помнить о них, когда используем их в своих построениях. Можно оспаривать удобство или адекватность реальному движению общеупотребительной математической модели. Для исследования физических бесконечно малых и бесконечно больших величин неоднократно предпринимались попытки построения теории действительных чисел, в которой аксиома Архимеда не имеет места. Во всяком случае, теория неархимедовых упорядоченных полей является весьма содержательной частью современной алгебры.

Рассмотрим несколько итераций линейной функции $R(x) = 1 + qx$, $0 < |q| < 1$:

$$R^{\circ 2}(x) = R(R(x)) = 1 + q(1 + qx) = 1 + q + q^2 x,$$

$$R^{\circ 3}(x) = R(R(R(x))) = 1 + q + q^2(1 + qx) = 1 + q + q^2 + q^3 x,$$

....

$$R^{\circ n}(x) = 1 + q + q^2 + ... + q^n x.$$

При $n \to \infty$ степень q^n стремится к нулю, поэтому конечная величина x не влияет на предельное значение $R = R^{\circ n}(x)$. Следовательно,

$$R = 1 + q + ... + q^n + ...$$

Так как, по условию, черепаха медленнее Ахилла, т.е. $q < 1$, то, переписав последнее равенство иначе: $R = 1 + q(1 + q + .. + q^{n-1} + ...)$, мы замечаем, что выражение в скобках равно R:

$$R = 1 + qR,$$

откуда находим сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$R = \frac{1}{1-q}.$$

Точка R совпадает в точности с неподвижной точкой функции $R(x)$.

Подобие

Итак, ведомые идеей итерации мы легко составили несколько задач, но главное, мы подметили, что иногда ЧАСТЬ ПОДОБНА ЦЕЛОМУ. Возникает несколько вопросов. Всегда ли применение итераций приводит к объекту, в котором имеется часть, подобная самому объекту? И что значит “подобная”? И как много таких частей? Что следует изменить в начальных данных, чтобы получить другую задачу и, следовательно, другое решение в виде числа, фигуры, алгоритма?

Рис. 44. В верхнем ряду – семейства белых квадратов, в нижнем – этапы построения множества F путем удаления белых квадратов из черного квадрата

Рассмотрим квадрат T_0 черного цвета со стороной 1 и, на *первом шаге*, изобразим квадрат T_1 белого цвета со стороной $\varepsilon_1 = 2^{-1}$, при этом центры квадратов будем считать совпадающими, а стороны параллельными друг другу. Напрашивается естественный вопрос: “*Чему равна площадь* f_1 *фигуры* $F_1 = T_0 \backslash T_1$, *полученной после удаления белого квадрата из черного*”. Ответ: $f_1 = 3/4$. На втором шаге разделим T_0 на 4 квадрата со стороной $1/2$ и по аналогии с первым шагом внутри каждого из них построим по белому квадрату со стороной $\varepsilon_2 = 2^{-2}$. Объединение четырех белых квадратов обозначим T_2. Площадь фигуры $F_2 = T_0 \backslash (T_1 \cup T_2)$ окажется равной f_2 =9/16= $(3/4)^2$. На третьем шаге построим фигуру T_3 из 16 белых квадратов со стороной $\varepsilon_3 = 2^{-3}$. Площадь фигуры $F_2 = T_0 \backslash (T_1 \cup T_2 \cup T_3)$ равняется $f_3 = 27/64 = (3/4)^3$.

Продолжая процесс, мы должны ожидать, что на n-ом шаге площадь фигуры $F_n = T_0 \backslash \bigcup_{i=1}^{n} T_i$ будет равна $f_n = (3/4)^n$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$, то предельная фигура $F = \lim\limits_{n\to\infty} F_n$ будет иметь нулевую площадь.

Прежде всего, выясним, чему равен внутренний периметр p_n множества F_n. Легко "вручную" подсчитать, что $p_1 = 2$, $p_2 = 4$, $p_3 = 7$. Несколько труднее, но также "вручную" удается найти p_4 =22,5. Чтобы не запутаться в сложном орнаменте отрезков фигур F_n, мы воспользуемся идеей подобия и заметим, что F_{n+1} есть объединение четырех равных фигур (назовем их блоками,– они разделяются средними линиями черного квадрата), каждая из которых подобна (с коэффициентом 1/2) объединению трех блоков фигуры F_n. Идея подобия быстро дает нам последовательность периметров, записанную рекуррентно

$$p_{n+1} = 4 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} p_n + 1 = 1 + \tfrac{3}{2} p_n$$

и явно

$$\{p_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\tfrac{8}{3} \cdot (\tfrac{3}{2})^n - 2\}.$$

Фракталы

В "Началах" Евклида говорится, что "*линия есть длина без ширины*". Мы будем рассматривать множества F, которые занимают промежуточное положение между кривой и плоскостью: это уже не кривая, но еще не плоскость. Ясно одно, множество F обладает свойством самоподобия в том смысле, что, рассматривая его в микроскоп, при любых увеличениях мы будем видеть одну и ту же картину. Такие множества Бенуа Мандельброт предложил называть ФРАКТАЛАМИ [116. С. 18]:

"Термин *фрактал* я образовал от латинского причастия *fractus*. Соответствующий глагол *frangere* переводится как *ломать*, *разламывать*, т.е. создавать фрагменты неправильной формы. Таким образом, разумно – и как кстати! – будет предположить, что, помимо значения "фрагментированный" (как, например, в словах *фракция* или *рефракция*), слово *fractus* должно иметь и значение "неправильный по форме" – примером сочетания обоих значений может служить слово *фрагмент*"[1].

---

[1] В настоящее время нет строго определения фрактала, хотя такие попытки делались, но как только появлялось определение, тут же появлялась в печати статья с описанием фрактала, не удовлетворяющего определению.

Рис. 45. Идея итераций привела нас к красивой самоподобной картине: полученное множество имеет нулевую площадь, но евклидовой кривой не является

Отличительной особенностью фракталов является наличие у них размерности, которая, как правило, является дробной величиной.

Пусть $F \subset \mathbf{R}^n$ – произвольное множество. Разобьем $\mathbf{R}^n$ на клетки – n-мерные кубики с ребром ε. Пусть $N = N(\varepsilon)$ – число клеток, имеющих непустое пересечение с F. Тогда *клеточной размерностью* множества F называется число

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \to \infty} \tfrac{\ln N}{\ln \varepsilon^{-1}}.$$

Например, куб $K \subset \mathbf{R}^n$ с единичным ребром покрывается $N = k^n$ клетками масштаба $\varepsilon = 1/k$. Поэтому

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \to \infty} \tfrac{\ln N}{\ln \varepsilon^{-1}} = \lim_{\varepsilon \to \infty} \tfrac{\ln k^n}{\ln k} = n,$$

т.е. клеточная размерность линейных пространств совпадает с обычной их размерностью.

Следствием этого определения является простой способ вычисления клеточной размерности некоторых фракталов: если данное множество является объединением n множеств, имеющих “мало” общих точек и подобных исходному множеству с коэффициентом подобия $k > 1$, то $D_0 = \frac{\ln n}{\ln k}$.

Последняя формула подсказывают нам, что итерирование линейной функции приводит к последовательности – к геометрической прогрессии, – формула общего члена которой выражает показательную зависимость общего члена от его номера. Поставим вопрос: *если одна и та же итерационная процедура дает две различные экспоненциальные зависимости* α и β, *то какова связь между* α и β? Одна зависимость в виде периметра нам уже известна: $\alpha(n) = \frac{8}{3} \cdot (\frac{3}{2})^n - 2$. Осталось придумать $\beta(n)$.

Простейшим примером здесь может служить сторона $\varepsilon_n = 2^{-n}$ квадратов фигуры T_n из предыдущего пункта. Если величины $\alpha = \alpha(n)$ и $\beta = \beta(n)$ связаны *степенным условием* $\alpha = k\beta^D$, то на дважды логарифмической плоскости множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$\ln\alpha = \ln k + D\ln\beta,$$

будет являться прямой с угловым коэффициентом D. Запись $\alpha = k\beta^D$ означает, что с ростом n величина α растет как β в степени D. Физики, акцентируя внимание не на k, а именно на D, вместо $\alpha = k\beta^D$ пишут либо $\alpha \sim \beta^D$, либо $\alpha \propto \beta^D$. В нашем случае точки $(\ln\varepsilon_n^{-1},\ \ln p_n)$ при больших n хорошо "ложатся" на прямую g (см. рис. 45). Пусть $p_n \propto \varepsilon_n^{1-D}$. Тогда угловой коэффициент прямой g равен $D - 1$. Поскольку $\frac{3}{2} = 2^{\log_2 3 - 1}$, то из $p_n \propto \varepsilon_n^{1-D}$ следует $2^{n(\log_2 3-1)} \propto 2^{n(D-1)}$, откуда $D = \log_2 3$.

Таким образом, мы установили, что периметр p множества F (см. п. 1.5) асимптотически ведет себя как степенная функция $y = \varepsilon^{1-D}$ от величины ε, которая является линейным масштабом, шкалой, скейлингом измерения периметра p, т.е.

$$p \propto \varepsilon^{1-\log_2 3}.$$

Установленный нами степенной закон обусловлен самоподобием множества F. Степенные законы встречаются не только в математике. Они пронизывают буквально все науки, в которых применяется мера, ибо научное знание вскрывает такие стороны сущности Природы как ее самоподобие и иерархичность.

Пример 3.25. Канторово множество. На первом шаге построим множество $_1$, разбив единичный отрезок $I = [0;\ 1]$ на три равных отрезка и удалив среднюю треть (рис. 46). На втором шаге строим множество $_2$, разбив каждый из 2-х отрезков множества $_1$ на три равных отрезка и удалив средние трети, и т.д. На n-м шаге строим множество $_n$ посредством деления каждого из 2^{n-1} отрезков множества C_{n-1} на три равные части и удаления средних третей. Множество $_n$ состоит из 2^n отрезков длиной 3^{-n}. Множество , которое получается в пределе $n \to \infty$, называется *множеством Кантора*. Оно описано в 1883 г. Георгом Кантором, который, в частности, доказал, что имеет мощность континуума. Покроем I отрезками (*клетками*) длиной $\varepsilon = 3^{-n}$. Тогда число $N(\varepsilon)$, окажется равным, с одной стороны,$N(\varepsilon) = \varepsilon^{-D}$, а с другой стороны, $N(\varepsilon) = 2^n$; следовательно, $D \ln \varepsilon^{-1} = n \ln 2$, или $D \ln 3 = \ln 2$, так что

$$D = \tfrac{\ln 2}{\ln 3} = \log_3 2.$$

Рис. 46. Множество Кантора после пяти итераций

Пример 3.26. Счетное множество $A = \{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ ...,\ \frac{1}{n},\ ...\}$ имеет размерность $D_B = 1/2$. Действительно, покрыв отрезок $I = [0;\ 1]$ клетками длиной $\varepsilon = 1/k$, замечаем, что расстояние между точками $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n+1}$ становится меньше ε, если $\frac{1}{n} - \frac{1}{1+n} = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{k}$. Так как при малых ε справедливы соотношения $k \sim \varepsilon^{-1}$, $n \sim k^{\frac{1}{2}} \sim \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$, то для покрытия A требуется $N = k_1 + k_2$ клеток, где $k_1 \sim \frac{1}{n\varepsilon} \sim \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ – число клеток, заполняющих отрезок от 0 до $1/n$, $k_2 \sim n \sim \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ – число клеток, покрывающих точки 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ..., $\frac{1}{n}$. Тогда

$$D_B = \lim_{\varepsilon \to 0} \tfrac{\ln N}{\ln \varepsilon^{-1}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \tfrac{\ln(2\varepsilon^{-\frac{1}{2}})}{\ln \varepsilon^{-1}} = \tfrac{1}{2}.$$

Пример 3.27. Ковер Серпинского. Изменим процедуру, описанную в п. 1.5, разбивая на n-м шаге черный квадрат не на 4^n квадратов, а на 9^n, при этом сторону белых квадратов примем равной не 2^{-n}, а 3^{-n}. Множество F, которое получается в пределе $n \to \infty$, называется *ковром Серпинского* (рис. 47). Покроем черный квадрат 3^{2n} клетками со стороной $\varepsilon = 3^{-n}$. Тогда число клеток, покрывающих F, будет равно $N(\varepsilon) = \varepsilon^D = 8^n$. Следовательно, $D = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1,8928$.

Рис. 47. Ковер Серпинского

Пример 3.28. Закон Ньютона. Сила F и расстояние r между центрами инерции двух тел удовлетворяют по степенному закону: $F \sim r^{-2}$. Закон Ньютона не зависит от расстояния r. Его самоподобие означает, что закон всемирного тяготения выполняется на любых масштабах [254. С. 63].

Пример 3.29. Площадь. Соотношение между площадью S подобных плоских фигур и их диаметрами, периметрами или другими линейными характеристическими размерами a: площадь пропорциональна квадрату линейного размера: $S \sim a^2$.

Пример 3.30. Шум. Пусть f – частота шума. M – мощность шума. Шумы в полупроводниках подчиняются степенному закону: $M \sim f^{-D}$. В зависимости от D шум называется *фликер-шумом* $(D = 1)$, *коричневым шумом* $(D = 2)$, *розовым шумом* $(1 < D < 2)$.

Пример 3.31. Громкость L и интенсивность I звука подчиняются закону: $L \sim I^{0,3}$. Шуршание шин резко идет на убыль при снижении скорости движения автомобилей. Интенсивность шума приближенно пропорциональна четвертой степени скорости.

Пример 3.32. Закон Ципфа: $f(r) \approx \frac{1}{r \ln(1,78R)}$ определяет зависимость между рангом r слова и частотой f слова для натурального языка из R слов в словаре. Под *словом ранга* r понимается слово, стоящее на r-м месте в списке слов данного языка, расположенных в порядке убывания частоты их употребления.

Пример 3.33. Услышать форму барабана. Герман Вейль доказал, что при большой частоте f для числа $N_3(f)$ резонаторов с достаточно гладкими, но в остальном произвольными границами асимптотически справедливо соотношение

$$N_3(f) = \tfrac{4\pi}{3} V(\tfrac{f}{c})^3,$$

где c – скорость звука, V – объем резонатора.

Пример 3.34. Размерность Минковского $\boldsymbol{D}_M$. Пусть центр небольшого круга радиуса r движется по кривой, заметая множество, называемое "*сосиской Минковского*" (рис. 48), площадь которого – *площадь Минковского* – обозначается $F(r)$. Тогда размерность Минковского равна по определению числу:

$$D_M = \lim_{r \to 0} \tfrac{\ln F(r)}{\ln(1/r)} + 2$$

при условии, что предел существует. Размерность Минковского гладкой кривой, как и следует ожидать, равна $D_M = -1 + 2 = 1$.

Рис. 48. Сосиска Минковского

Пример 3.35. Мозг млекопитающего характеризуется соотношением:

$$V^{\frac{1}{3}} \propto S^{\frac{1}{D}},$$

где V – объем, S – площадь поверхности головного мозга млекопитающего, $2,73 < D < 2,79$.

Пример 3.36. Деформация сталей. Ишикава и др. [272] исследовали прерывистую деформацию аустенитных нержавеющих сталей 310S и 304L при статическом растяжении и условиях адиабатической деформации при температуре 4 K и скорости деформирования $3 \cdot 10^{-4}$ м/c. В экспериментах фиксировали скачки Δ температуры, соответствующие скачкам нагружения. Была установлена степенная зависимость $N \propto \Delta T^{0,63}$ между частотой $N(\Delta T)$ и Δ.

Канторово множество

Не претендуя на оригинальность в деле изобретения хотя бы в малой степени надежного алгоритма придумывания совершенно нового в науке, попытаемся обратить внимание стоящего перед творческим искушением на некоторые идеи посредством нижеследующего описания различных способов построения канторова множества, явившего собой в 19 веке – “патологию в изысканиях не для настоящих ученых, а для злоупотребляющих математическими причудами”, в 20 веке – лекарство против турбулентофобии, а в 21 веке – “атом водорода в периодической таблице фрактальных элементов”. С последним следует безоговорочно согласиться хотя бы по той причине, что почти все руководства по фрактальной геометрии начинают свое повествование с дисконтинуума, который описал в 1883 году Георг Кантор и который хорошо знаком студентам из курса математического анализа как пример множества нулевой меры Лебега мощности континуум.

Честолюбивые устремления креативно мыслящих людей, в особенности тех, которые со студенчества мечтают стать колумбами в естественных или других науках, должно не только приветствовать, но и развивать путем надлежащей систематической работы.

1. *Способы задания.* Напомним различные способы получения канторова множества.

Первый способ предложил Георг Кантор в 1883 году. Единичный отрезок делится на три равных отрезка, и средняя треть удаляется. Каждый из оставшихся двух отрезков снова делится на три равных отрезка, и средние трети удаляются. Этот процесс проделывается бесконечно много раз. В результате чего получается канторово множество, дисконтинуум, канторова пыль.

Второй способ также очень распространен. Он основан на системе итерированных функций (СИФ) [97, 233]. Сначала единичный отрезок отображается с помощью гомотетии α с центром в нуле и коэффициентом $1/3$ и гомотетии β с центром в единице и тем же коэффициентом на два отрезка. Полученные отрезки α и β отображают на четыре отрезка, затем на восемь и т.д.

Третий способ называется “створаживание”. Единичный стержень единичной массы и единичной плотности продольным разрезом делится пополам, и обе части укорачиваются сжатием в три раза к концам данного стержня. Затем с получившимися двумя стержнями снова поступают так же. После выполнения бесконечного числа таких итераций получится множество Кантора.

Четвертый способ. Даны две проективные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Из A и B записываются слова длины 2: AA, BA, AB, BB; затем – длины 3: AAA, BAA, ABA, BBA, AAB, BAB, ABB, BBB и т.д. В пределе получится континуальное множество бесконечных слов из двух букв. Проективные матрицы рассматриваются с точностью до ненулевого множителя, т.е. ненулевые матрицы и считаются эквивалентными, если $= \lambda$ для ненулевого числа λ. Множество всех проективных матриц образует 3-мерное проективное пространство $\mathbf{P}^3$, в котором особо выделяется множество q вырожденных матриц. Множество q является двумерной квадрикой с двумя семействами прямолинейных образующих. Множество содержится на одной из образующих квадрики qи является в точности канторовой пылью.

Пятый способ почти явно следует из первого. Пусть $I = [0,\ \ 1]$,

$$f : I \longrightarrow I$$

отображение, связанное с переходом от двоичной записи числа $x \in I$ к троичной. Точнее, объявим двоичную запись числа $x \in I$ выполненной в троичной системе счисления (без изменения цифр 0 и 1). Затем это троичное число умножим на 2. В результате чего мы получим число $y = f(x) \in I$, в записи которого используются только две цифры: 0 и 2. Получившееся таким способом канторово множество $f(I)$ состоит из всех троичных дробей, в записи которых не используется цифра 1.

Шестой способ вытекает непосредственно из предыдущего. Положим $p = 1/3$. Тогда канторово множество состоит из всех чисел вида

$$2\sum_{k=1}^{\infty} a_k p^k,$$

где $a_k \in \{0;\ \ 1\}$.

Седьмой способ. Он основан на идее, высказанной Германом Вейлем: *ищите симметрию*! Под симметрией будем понимать любое преобразование канторова множества. Простейшей симметрией является центральная симметрия. Действительно, мы можем перегнуть пополам единичный отрезок в точке $a_0 = \frac{1}{2}$, совместив правую половину канторова множества с левой. В результате чего канторово множество укоротится в 3 раза. Продолжим перегибания отрезка последовательно в точках $a_1 = \frac{1}{6}$, $a_2 = \frac{1}{18}, \ldots, a_n = \frac{1}{2\cdot 3^n}, \ldots$ После бесконечного числа таких итераций множество Кантора (но не исходный отрезок!) перейдет в нуль в отображении, которое мы обозначим f. При обратном развертывании нуль начнет размножаться по экспоненте, породив кантового множество. Опишем сказанное на математическом языке.

На отрезке $I = [0,\ 1]$ отметим n точек:

$$bq, \quad bq^2, \quad . \ . \ ., \quad bq^n,$$

где $q = \frac{1}{3}$, $b = \frac{3}{2}$ (множитель b должен удовлетворять условию нормировки $2bq = 1$). Для каждого $k \in \{1,\ .\ .\ .,\ n\}$ определим отображение

$$f_k(x) = \left\{ \begin{array}{c} x \quad x \le bq^k, \\ 2bq^k - x \quad x > bq^k, \end{array} \right.$$

которое соответствует перегибанию “пополам” отрезка. Рассмотрим композицию $f^{\circ n} = f_n \circ\ .\ .\ .\ \circ f_2 \circ f_1$ перегибаний f_k в точках bq^k и найдем полный прообраз $C_n = f^{-1}(0)$ отображения f в точке 0. График функции $f^{\circ n}$ при $n \to \infty$ представлен на рис. 49. Построение множества C_n выполняется в три этапа: первый этап – *свертывание*, второй этап – *прокалывание в нуле*, третий этап – *развертывание*.

Рис. 49. Нулями функции $f^{\circ\infty}$ является канторово множество

При развертывании отображение f_k^{-1} выполняется по правилу:

$$f_k^{-1}(x) = \left\{ \begin{array}{c} x \quad x > bq^k, \\ 2bq^k - x \quad x \le bq^k. \end{array} \right.$$

Отображение f^{-1} есть композиция $f^{-1} = f_1^{-1} \circ\ .\ .\ .\ \circ f_{n-1}^{-1} \circ f_n^{-1}$. Множество C_n строится последовательным выполнением отображений f_k^{-1}: $T_0 = \{0\}$, $T_1 = T_0 \cup f_n^{-1}(T_0)$,..., $T_{k+1} = T_k \cup f_{n-k}^{-1}(T_k)$, ..., $C_n = T_{n-1} \cup f_1^{-1}(T_{n-1})$. Нетрудно убедиться, что в пределе при $n \to \infty$ мы получим классическое множество Кантора $C = \lim\limits_{n\to\infty} C_n$.

2. ***Об обобщениях.*** Различные способы построения того или иного объекта обычно представляют определенный интерес с точки зрения изучения этого объекта. Но главное достоинство новых способов построения объекта в том, что их обобщения дают оригинальные результаты при исследовании возникающих новых объектов. Для чего нужны обобщения? С одной стороны, обобщения являются внутренней потребностью развивающейся теории, которая в результате обобщения вскрывает инвариантные свойства и делает простой и ясной классификацию изучаемых объектов, что важно для практики. Например, результаты абстрактной работы Апполония по коническим сечениям И. Кеплер успешно использовал для описания орбит, по которым движутся планеты. С другой стороны, обобщения оттеняют красоту картины и богатство ее палитры, еще вчера казавшейся всем безоговорочно черно-белой.

Для получения обобщений обычно применяются приемы, основанные на деформации первоначальных данных: изменение размерности объемлющего пространства, изменение взаимного положения данных вспомогательных объектов относительно друг друга и относительно ключевого объекта, их формы, количественные характеристики (длины отрезков, величины углов и т.п.), изменение формы искомого объекта. Эти приемы достаточно подробно описаны в литературе. Но нас интересуют креативные поиски именно во фрактальной геометрии.

Самоподобные множества

Отличительной особенностью иерархических структур в природных объектах является их масштабная инвариантность, обусловленная самоподобием внутренней геометрии объектов. Для описания иерархической структуры применяются числовые характеристики, каковыми являются, например, часто используемые размерности: клеточная D_0, информационная D_1 и корреляционная D_2. Они имеют определенные геометрические и физические интерпретации.

Отличительная особенность иерархических структур природных объектов – инвариантность относительно групп симметрий – обусловлена самоподобием их внутренней геометрии, эволюционно вытканной из каскадов фрактальных систем – орбит групп симметрий, возникших благодаря вездесущей энтропии и когерентно действующих в противовес ей же. Указанная инвариантность проявляется в примитивных случаях в виде масштабной инвариантности, в простых случаях – в виде линейной инвариантности, в сложных случаях – в виде нелинейной инвариантности.

Плоды абстрагирования – линейные объекты: точка, прямая, плоскость, гиперплоскость – не только масштабно инвариантны, но их обобщенные размерности Реньи D_q совпадают с топологической размерностью dпри всех $q \in \mathbf{R}$; в отличие от линейных подпространств, объекты *фрактальной геометрии* – фракталы и мультифракталы – могут вести себя не так послушно и нарушать это равенство хотя бы тем, что обобщенные размерности, как правило, – дробные числа. При этом все размерности Реньи однородных фракталов равны между собой [14, 97, 233].

Глобальный характер размерностей Реньи не позволяет решить обратную задачу: восстановить фрактал по его бесконечному спектру обобщенных размерностей. Отсюда ясно, что цель фрактальной геометрии – построение полной классификации фракталов – пока эфемерна. Для достижения такой цели, по-видимому, обязательно локальное рассмотрение фракталов с целью найти дополнительные их инварианты.

Другая проблема фрактальной геометрии заключается в отыскании критериев, характеризующих вид самоподобия данного множества. Как, например, выяснить, является ли рельеф данного разрушенного образца самоподобным, самоаффинным или иным каким-то "само". В существующей литературе широко используются только два вида самоподобия, предложенные Бенуа Мандельбротом: самоподобие и самоаффинность. Ниже мы расширим виды самоподобий, введя понятие "G-самоподобия".

Заметим также, что если многообразие M всех отображений данного класса наделено групповой структурой, то при определенных условиях небольшое количество стартовых отображений при их бесконечном перемножении могут породить в M (или в его замыкании) аттрактор, который будет G-самоподобен (на всех уровнях). Простейший пример приводится в работе [100], где в качестве многообразия M процессов рассматривается трехмерная группа $\mathbf{PGL}(1)$ дробно-линейных преобразований (вещественной или комплексной) прямой, а также группа $\mathbf{PGL}(n)$ коллинеаций n-мерного проективного пространства.

Определение. Пусть $F \subset M$ – подмножество многообразия M, на котором действует группа G. Тогда множество F будем называть *самоподобным относительно группы G* или *G-самоподобным*, если для любых x, $y \in F$ и существуют окрестности U, $V \subset M$ точек x, yи преобразование $g \in G$, такие, что $g(F \cap U) = F \cap V$.

Согласно [116], треугольник Серпинского, будучи аттрактором системы итерированных преобразований из группы $\mathbf{\Pi}(2)$ подобий евклидовой плоскости $\mathbf{E}^2$, является $\mathbf{\Pi}(2)$-самоподобным (или, по терминологии Бенуа Мандельброта, просто *самоподобным*) множеством.

В общем случае, если $G = \mathbf{\Pi}(n)$ – группа подобий n-мерного евклидова пространства $\mathbf{E}^n$, то множество F из определения 2 мы будем называть *евклидово самоподобным.*

Простейшие плоские евклидово самоподобные фракталы можно получить, исходя из трехклеточного квадратного генератора со стрелками [115], который устроен следующим образом.

Разобьем квадрат K с единичной стороной на четыре квадрата K_0, K_1, K_2, K_3 (рис. 50). Для данного $i \in \{1,\ 2,\ 3\}$ существует 4 преобразования подобия 1 рода и 4 преобразования подобия 2 рода с коэффициентом подобия $k = 1/2$, отображающих K на K_i. Указав стрелки в трех квадратах K_i, мы получим три преобразования φ_1, φ_2, φ_3, которые являются образующими системы итерированных преобразований (традиционно мы будем говорить “система итерированных функций”, сокращенно СИФ, так как преобразование в любом репере записывается с помощью функций). В данном случае образующие СИФ можно выбрать $8^3 = 512$ способами, которые с точностью до симметрии дают **272** различных фрактала.

Как гласит общая теория [97], при реализации СИФ-процедуры, прежде всего, необходимо убедиться, что все преобразования СИФ – *сжимающие* (ниже мы покажем, что это слишком сильное требование и его можно ослабить). Поскольку выбранные нами преобразования φ_1, φ_2, φ_3 уменьшают все расстояния в 2 раза, то они являются сжимающими. Обозначив через T_0 любой компакт на $\mathbf{E}^2$, мы построим множество T как предел:

$$T = \lim_{n\to\infty} \varphi_1(T_n) \cup \varphi_2(T_n) \cup \varphi_3(T_n).$$

На рис. 50 приведены генераторы, их коды и соответствующие фракталы; последние имеют емкость $D_0 = \log_2 3$ и являются евклидово самоподобными, поэтому $D_q = \log_2 3$ для всех $q \in \mathbf{R}$.

Рис. 50. Генераторы, коды и соответствующие им евклидово самоподобные фракталы

Пусть $G = \mathbf{Aff}(n)$ – группа всех аффинных преобразований n-мерного аффинного пространства $\mathbf{A}^n$. Тогда множество F мы будем называть *аффинно самоподобным* (или, согласно [116], *самоаффинным*).

Если $G = \mathbf{PGL}(n)$ – группа коллинеаций (линейных преобразований) n-мерного проективного пространства $\mathbf{P}^n$, множество F будем называть *проективно самоподобным.*

Самоподобия множеств мы будем делить на *линейные* и *нелинейные.* Множество F будем называть *линейно самоподобным*, если группа G из определения 2 является подгруппой группы $\mathbf{PGL}(n)$. Так как справедлива цепочка включений $\mathbf{\Pi}(n) \subset \mathbf{Aff}(n) \subset \mathbf{PGL}(n)$, то к линейно самоподобным относятся евклидово, аффинно и проективно самоподобные множества. В частности, множество Кантора (1883), снежинка Коха (1903), ковер Серпинского (1915) – евклидово самоподобные множества [97], а траектория частицы броуновского движения и графики функций Вейерштрасса – аффинно самоподобные множества [233].

Многочисленные примеры природных фрактальных объектов показывают, что кроме евклидово самоподобных и аффинно самоподобных множеств встречаются объекты с более сложными инвариантными характеристиками, выходящими за пределы указанных самоподобий. Механизм трещинообразования, вероятно, не может быть объяснен с позиций аффинного самоподобия, ибо структура трещин имеет более сложную степень самоорганизации.

Приведем примеры построения *проективно самоподобных фракталов* с помощью системы итерированных коллинеаций проективной плоскости, причем ни в какой карте эти коллинеации не должны являться аффинными преобразованиями.

Пусть в евклидовой плоскости даны квадратK и лежащий внутри квадрата выпуклый четырехугольник T. Тогда существует 16 коллинеаций (проективных преобразований расширенной плоскости), отображающая K на T. При этом 8 из этих коллинеаций отображают внутренность квадрата K на внутренность четырехугольника T. Если же внутри K даны два выпуклых четырехугольника T_1 и T_2, то существуют 64 пары коллинеаций вида α_i, отображающие квадрат K на T_i. Любая такая пара коллинеаций образует систему итерированных преобразований (СИФ), аттрактор которой обозначим F [150]. Квадрат K вместе с T_1, T_2 называется *генератором аттрактора F.* Как правило, F является мультифракталом, который к тому же не обязан быть евклидово или аффинно самоподобным (рис. 51).

Рис. 51. Проективно самоподобные фракталы

Не задерживаясь на уравнениях коллинеаций (их можно найти в [150]), применим метод вариаций условия к нашему построению. Выясним, что даст нам изменение требования, гласящего, что преобразования СИФ должны быть непременно сжимающими. В замечательном учебнике Р. Кроновера [97] имеется следующая

Теорема 3.37. *Пусть* $T_1, T_2, \ldots, T_m$ *– сжимающие отображения в* $\mathbf{R}^k$*. Для произвольного начального множества* $E_0 \in K$*, система итерированных функций*

$$E_n = \mathbf{T}(E_{n-1}), \quad n = 1,\ 2,\ \ldots,$$

где $\mathbf{T}\colon K \longrightarrow K$ *– преобразование Хатчинсона, определяемое тем, что*

$$\mathbf{T}(E) = T_1(E) \cup T_2 \cup \cdots \cup T_m(E), \quad E \in K,$$

сходится в метрике Хаусдорфа к единственному множеству $E \in K$ *. Множество* E *называют аттрактором СИФ. Обратно, множество* E *можно представить в виде:*

$$E = \lim_{n\to\infty} \mathbf{T}^{\circ n}(E_0).$$

Требование сжимаемости преобразований СИФ на самом деле является слишком сильным. Рассмотрим пример мультифрактала, полученного с помощью системы проективных преобразований плоскости, которые не являются сжимающими. Пусть α – композиция поворота плоскости вокруг центра квадрата на угол $\pi/2$ и коллинеации, отображающей квадрат на левую черную трапецию, а β – композиция поворота плоскости вокруг центра квадрата на угол $-\pi/2$ и коллинеации, отображающей квадрат на правую черную трапецию (рис. 52). Тогда СИФ с образующими α, β порождают мультифрактал, причем эти образующие, очевидно, не являются сжимающими отображениями ни в какой метрике.

Рис. 52. Контрпример к теореме 3.37a – после одной итерации отображение Хатчинсона переводит квадрат в объединение двух черных трапеций; b, c, d, e – после соответственно двух, четырех, шести, восьми итераций образом квадрата является множество, состоящее из 4, 16, 64, 256 черных четырехугольников; f – предельный мультифрактал

Приведенный контрпример требует внесения корректив в ту часть теории, которая касается построения фракталов посредством СИФ. Однако можно с уверенностью сказать, что приведенный контрпример и теорема 4.1.2 из [97] подтверждают главную здесь идею о том, что множества E_i образуют в пространстве K последовательность, сходящуюся к мультифракталу E.

Фрактальная размерность неограниченных множеств

Пусть F – произвольное множество пространства $\mathbf{R}^n$. Известно [97], что если F – компакт, то всегда можно найти размерность Минковского $D_M = \dim_M F$ компакта F, причем D_M совпадает с клеточной размерностью D_B компакта F.

Теорема [97]. *Пусть* A *– компакт в* $\mathbf{R}^n, f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, $y_i = f_i(x_1, ..., x_n)$, i, j, $k = 1 .. n$ *– отображение, ограничение которого* $f|_A : A \rightarrow \tilde{A}A$ *– биекция. Пусть все частные производные* $\partial f_j / \partial x_k$

– непрерывны на A, а все частные производные компонент обратного отображения $f^{-1}: \tilde{A} \to A$ – непрерывны на $\tilde{A}$. Тогда $\dim_M \tilde{A} = \dim_M A$.

Из этого утверждения следует, что клеточные размерности *бирационально изоморфных* [55] множеств равны. Отсюда вытекает метод вычисления размерности неограниченных множеств в пространствах, которые могут быть вложены в $\mathbf{P}^n$, ибо всякое такое множество с проективной точки зрения – ограничено. Другими словами, *для любого множества $F \subset \mathbf{P}^n$ существует проективно изоморфное ему ограниченное множество $\tilde{F} \subset \mathbf{R}^n$.*

Теорема [115. С. 131]. *Пусть $A = \{1,\ \frac{1}{2},\ \ldots,\ \frac{1}{k},\ \ldots\}$. Тогда* $\dim A{=}\frac{1}{2}$.

Найдем метод определения размерности Минковского *неограниченных* множеств.

Для этого сначала нужно пополнить пространство $\mathbf{R}^n$, содержащее данное неограниченное множество F, до проективного пространства $\mathbf{P}^n$, а затем выбрать такую карту многообразия $\mathbf{P}^n$, в которой неоднородные координаты всех точек множества F конечны. Если такой выбор сделан, то для вычисления размерности Минковского $\dim_M F$ множества F можно поступить стандартным образом [97]. Приведем примеры.

Утверждение. $\dim_M \mathbf{N} = \frac{1}{2}$.

Следствие. $\dim_M \mathbf{Z} = \frac{1}{2}$.

Утверждение. *Пусть*

$$A(h) = \{(x,\ y) \in \mathbf{R}^2 |\, x \in \mathbf{Z},\ y \in [-h,\ h],\ 0 \leq h \leq \infty\}.$$

$$\dim_M A(h) = \begin{cases} 0,5 & \text{при}\ \ h = 0, \\ 1 & \text{при}\ \ 0 < h < \infty, \\ 1,5 & \text{при}\ \ h = \infty. \end{cases}$$

Утверждение. *Пусть $\Omega(k,\ n)$ – объединение всех k-мерных плоскостей целочисленной решетки $\mathbf{Z}^n\mathbf{R}^n$. Тогда* $\dim_M \Omega(k,\ n) = \ = \frac{1}{2}(k{+}n)$.

Для размерностей, указанных в утверждении 8, выполняется стандартная формула: $\dim A \cap B = \dim A + \dim B - n$. С одной стороны, очевидно,

$$\dim_M \Omega(p,\ n) {\cap} \Omega(q,\ n) = \dim_M \Omega(p{+}q{-}n, n) = \tfrac{1}{2}(p{+}q{-}n{+}n) = \tfrac{1}{2}(p{+}q).$$

С другой стороны,

$$\dim_M \Omega(p,\ n) \cap \Omega(q,\ n) = \dim_M \Omega(p,\ n) + \dim_M \Omega(q,\ n) - n =$$

$$= \frac{1}{2}(p+n) + \frac{1}{2}(q+n) - n = \frac{1}{2}(p+q).$$

Утверждение. *Пусть* $\Theta \subset \mathbf{R}^3$ *– 2-мерная этажерка с бесконечным числом горизонтальных полок, являющихся прямоугольниками со сторонами* a, $b \in \mathbf{R}_+$ *(полки расположены в плоскостях* $z = m$*, где* m *пробегает* $\mathbf{Z}$*). Тогда размерность* D *этажерки* Θ *зависит от* a, b *и принимает значения, указанные в табл.* 17.

Таблица 17

Размерность этажерок 3-мерного пространства

	$b = 0$	$0 < b < \infty$	$b = \infty$
$a =0$	$D = 0{,}5$	$D = 1$	$D = 1{,}5$
$0 < a < \infty$	$D = 1$	$D = 2$	$D = 2{,}5$
a $= \infty$	$D = 1{,}5$	$D = 2{,}5$	$D = 2{,}5$

Извлечение мультифрактальной информации из однородных фракталов

Мультифрактальный формализм (МФФ) [46], используемый инженерной теорией и практикой применительно к однородным фракталам, приводит к вырождению размерностей Реньи, сводя их лишь к одной числовой характеристике – к емкости D_0. Такое положение дел явно не удовлетворяет исследователей, ибо емкость не дает никакой информации, например, о форме фрактала. Структура исследуемого образца на различных масштабах обусловлена действием на нем группы симметрий и наличием асимметрий. Поэтому информация формы любого образца должна описываться, по крайней мере, непрерывным спектром "хороших" размерностей, т.е. таких, каждая из которых становится равной размерности евклидова пространства, как только мы переходим к обычным многообразиям.

Ниже предлагаются некоторые идеи относительно вычисления дополнительных характеристик информации формы.

Индикатриса множества в точке. Рис. 50 свидетельствует, что существуют фракталы с явно не одинаковой геометрией, но имеющие одинаковые обобщенные размерности Реньи. Следовательно, этих числовых характеристик недостаточно для описания множеств. Чтобы найти дополнительные характеристики фракталов, попытаемся выявить их локальное строение. Для этого рассмотрим обобщение производной функции одной переменной.

Пусть $M \subset \mathbf{E}^n$ – произвольное множество, $a \in M$ – произвольная точка, ω – открытый диск радиуса ε с центром (рис. 53).

Рис. 53. Ретракция множества M на окружность S

Рассмотрим случайную точку b из пересечения $M_\varepsilon = \omega \cap M$. Тогда луч с вершиной a, содержащий b, пересекает границу $S^{n-1} = \partial\omega$ диска ω в некоторой точке $f(a)$. Тем самым определено отображение

$$f : M_\varepsilon \to S^{n-1},$$

которое будем называть *ретракцией* множества M на сферу S^{n-1}. Следовательно, мы получим некую плотность $p_{a,\,\varepsilon}(\varphi)$ распределения вероятностей случайной точки $\varphi \in S^{n-1}$ (случайного направления φ). Если существует предел

$$p_a(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} p_{a,\,\varepsilon}(\varphi), \tag{1}$$

то распределение $p = p_a(\varphi)$ будем называть *индикатрисой множества* M a.

Пример 3.38. Пусть F – ковер Серпинского с кодом $(+0,\ +0,\ +0)$, $a = (\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}) \in F$ – центр квадрата K. Тогда индикатриса $p(F,\ a)$ множества F в точке a имеет вид, представленный на рис. 54а.

Рис. 54. Индикатрисы евклидово самоподобных фракталов в точке x, указанной стрелкой; из точки x выходят лучи, размерность пересечения которых с фракталом равна 1: а – четыре луча; б – два луча

Пусть F – фрактал с кодом $(+3,+0,+1)$, $a = (\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}) \in F$. Тогда индикатриса $p(F,\ a)$ множества F в точке a имеет вид, представленный на рис. 54б.

Пример 3.39. Пусть M – график дифференцируемой функции $y = y(x)$. Тогда индикатриса графика M в точке $a = (x,\ y(x))$ имеет вид:

$$p_a(\varphi) = \left\{ \begin{array}{c} \infty \ \ tg\varphi = \frac{dy}{dx}, \\ 0\ , \end{array} \right.$$

при этом должно выполняться условие: $\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} p^2 d\varphi = 1$.

Покроем как обычно [46, 97, 233, 254], множество F кубическими клетками с ребром δ. Занумеровав клетки, имеющие непустое пересечение с F, числами $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ N = N(\delta)\}$, и найдя неким способом меру μ_i клетки с номером i, мы можем найти размерности Реньи:

$$D_q = \frac{1}{q-1}\lim_{\delta\to 0}\frac{\ln\sum_{i=1}^{N}\mu_i^q}{\ln\delta}. \qquad (2)$$

Внешний спектр. Две клетки назовем соседними, если у них имеется, по крайней мере, общая вершина. Для i-й клетки подсчитаем число s_iсоседних с ней клеток. Будем считать, что до преобразования меры непустых клеток равны μ_i, а после преобразования новая мера клетки с номером i равна $\nu_i = 3^{-E}\sum\limits_{j\in J_i} s_j$, где E =dim $< F>$ – размерность линейной оболочки $<$ F $>$ фрактала F, а суммирование ведется по множеству J_i всех соседних клеток, включая саму клетку. После такого преобразования мы получим неоднородное множество.

Внутренний спектр. Пусть F – однородный фрактал, каждой непустой клетке приписана постоянная мера $\mu_{i0} = p = N^{-1}$. При этом меры должны быть нормированы на единицу, т.е. $\sum_{i=1}^{N} \mu_{i0} = 1$. Из стартовой меры $\mathrm{M}_0 = \{\mu_{i0}\}_{i=1}^{N}$ посредством “внутреннего” преобразования φ построим новую меру $\mathrm{M}_1 = \varphi\,(\mathrm{M}_0)$, и, далее, по рекурсии,– последовательность $\{\mathrm{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$, такую, что $\mu_{i,\ n+1} = \sum\limits_{j \in J_i} \frac{\mu_{j,\ n}}{s_j}$, где индекс суммирования пробегает по всем соседним клеткам. В отличие от “внешнего” преобразования, которое, в конце концов, “растворяет” F в пространстве, преобразование φ в пределе $n \to \infty$, стабилизирует меру независимо от стартовой меры (нормированной на 1), стремясь к предельной мере $\mathrm{M}_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{M}_n$. Теперь мера $\mathrm{M}_\infty = \{\mu_{i\infty}\}_{i=1}^{N}$ не является однородной, и к ней вполне применим МФФ со всеми вытекающими последствиями.

Пример 3.40. Если F – n-мерное гладкое многообразие, например, куб, то “внутреннее” преобразование φ дает, как и следовало ожидать, вырожденный спектр размерностей Реньи, равных n.

Пример 3.41. Как известно, стартовые меры однородных фракталов равны $\mu_{i0} = p = N^{-1}$. Численный эксперимент показывает, что предельные меры M_∞ модельных фракталов становятся неоднородными. Например, после преобразования φ меры треугольника Серпинского и других трехклеточных [150] однородных фракталов предельная мера порождает функции D_q, которые не совпадают друг с другом. Графики этих функций приведены на рис. 55.

Рис. 55. Внутренние спектры Реньи для однородных фракталов с $D_0 = \log_2 3$, полученные с помощью примененного бесконечно много раз внутреннего преобразования φ

Пример 3.42. Пусть F – рельеф разрушенного образца. Вообще говоря, ниоткуда не следует, что F – имеет неоднородную структуру. Однако самое важное здесь то, что F обладает информацией формы. Покрыв F трехмерными кубами-клетками с ребром δ, мы можем считать, что (ненормированная) мера каждой клетки, имеющей непустое пересечение с F, равна 1. Затем применим "внутреннее" преобразование φ к этим мерам. В результате применения бесконечного числа преобразований φ мы получим стабилизировавшуюся меру, которая не будет однородной. Следовательно, размерности Реньи, вычисленные по формуле (2), дадут кривую, отличную от горизонтальной прямой.

Внутреннее преобразование φ меры в сочетании с МФФ может иметь различные технические приложения для описания параметризации самых разнообразных объектов, к каковым относятся, например, рельеф разрушенного образца, кластеры, полимерные молекулы с одинаковыми спектрами Реньи и др.

Поляры дробного порядка

Деление чисел на *целые* и *дробные* имеет нетривиальные аналогии в естественных науках. Например, в дифференциальном и интегральном исчислении наряду с производными целочисленного порядка $n \in \mathbf{N}$ еще в XIX веке была создана глубокая теория, оперирующая производными дробного порядка. Кроме того, наравне с целочисленными интегралами в ней применяются интегралы дробного порядка [176]. Другой пример доставляет фрактальная геометрия, в которой изучаются множества как целочисленной, так и дробной размерности. В физике встречаются задачи – например, передача импульса по фракталу,– которые приводят к дифференциальным уравнениям дробного порядка, физический смысл которых далек от ясного понимания [138].

В математическом анализе при изучении свойств функций применяется так называемая полярная форма порядка $n \in \mathbf{N}$, а в геометрии для выяснения свойств многообразий – целочисленные поляры точек относительно этих многообразий. В существующей литературе нам не встречались примеры поляр дробного порядка.

На примере звезд [148] мы дадим геометрическую интерпретацию поляр дробного порядка. Будем называть *n-звездой* (или просто *звездой*) *с центром в точке M* конечное множество Z_M^n из n прямых евклидовой плоскости $\mathbf{E}^2$, проходящих через M и делящих $\mathbf{E}^2$ на $2n$ равных углов; прямые, из которых состоит звезда, будем называть ее *лучами*.

Определим отображение $f : \mathbf{P}^{2*} \longrightarrow \mathbf{P}^2$ двойственной проективной плоскости $\mathbf{P}^{2*}$ на расширенную аффинную плоскость $\mathbf{P}^2 = \overline{\mathbf{A}}^2$, порождаемое фиксированной алгебраической кривой γ степени n: произвольной прямой $l \in \mathbf{P}^{2*}$ сопоставляется центроид [147] $g = f(l)$ точек $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$ пересечения кривой γ и прямой l. Будем называть f *опорным отображением*, а точку g – *опорой прямой* l.

Пусть некоторая гиперповерхность γ лежит в $\mathbf{P}^n$, являясь нулями формы $F = F(x^0 :\ ...\ : x^n)$ степени d. Тогда поляра $\Delta^1(M,\ \gamma)$ первого порядка [55] точки $M = (m^0 :\ ...\ : m^n)$ относительно γ определяется как множество нулей формы $\Delta^1 F = \frac{\partial F}{\partial x^0} m^0 + ... + \frac{\partial F}{\partial x^n} m^n$; очевидно, $\deg \gamma = d - 1$. Поляра $\Delta^k(M,\ \gamma)$ порядка k точки M определяется по индукции как поляра $\Delta^1(M,\ \Delta^{k-1})$ точки M относительно $\Delta^{k-1}(M,\ \gamma)$.

В двумерном случае, если центр звезды $\gamma = Z^n_O$ совместить с началом координат, то γ будет нулями формы F от $x : y$, при этом k-поляра $\Delta^k(M,\ \gamma)$ точки $M = (x_0,\ y_0)$ – нули формы, записываемой символически так: $\Delta^k F = (\frac{\partial}{\partial x} x_0 + \frac{\partial}{\partial y} y_0)^k F$. Например,

$$\Delta^2 F = (\tfrac{\partial}{\partial x} x_0 + \tfrac{\partial}{\partial y} y_0)^2 F = \tfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} x_0^2 + 2 \tfrac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} x_0 y_0 + \tfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} y_0^2.$$

Теорема. *Пусть* $\gamma = Z^n_O$ *– звезда с центром O,* f *– опорное отображение относительно* γ*. Тогда для любого натурального числа* $n > 1$ *полный прообраз* $f^{-1}(M)$ *произвольной точки* $M \neq 0$ есть $(n-1)$-звезда Z^{n-1}_M [148].

Теорема. *Пусть* $\gamma = Z^n_O$ *– звезда с центром O, M – произвольная точка, отличная от O. Тогда для любого натурального числа* k, $k = 1\ ..\ n-1$, *k-поляра* $\Delta^k(M,\ \gamma)$ *точки M относительно* γ *есть* $(n-k)$*-звезда* Z^{n-k}_O [148].

Поляра порядка k имеет простую геометрическую интерпретацию. Пусть φ_i – всевозможные углы между данной прямой m, проходящей через центр звезды Z^{n-k}_O, и ее лучами l_i. Повернув прямую m вокруг O на углы, равные $n\varphi_i/(n-k)$, мы получим звезду $\Delta^k(Z^n_O)$.

Целочисленные поляры.Для любого натурального $k \in \{1,\ \ldots,\ n-1\}$ и любой звезды Z^n

$$\Delta^k(Z^n) = \pi_1 \circ \pi_2^{-1} \circ h \circ \pi_2 \circ \pi_1^{-1}(Z^n),$$

где $\pi_1 : X \to \mathbf{R}^2$, $\pi_2 : X \to \mathbf{R}$ – проекции геликоида

$$X = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbf{R}^3 | x = s\cos t,\ \ y = s\sin t,\ \ z = t,$$

определяемые равенствами:

$$\pi_1(x,\ y,\ z) = (x,\ y),\ \pi_2(x,\ y,\ z) = z;$$

$h = H_u^{\frac{n}{n-k}} : z \mapsto \frac{n}{n-k}(z-u) + u, (u \in \mathbf{R}$ – фаза).

Дробные поляры. Конструкция п. 5 позволяет получить не только целочисленную, но и дробную поляру в виде звезды Z^{n-k} для любого действительного k, не равного n. Следовательно, такую звезду можно назвать k-полярой относительно n-звезды, даже если kне является целым числом.

Если k – рациональное число, т.е. $k = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbf{N}$, то $\Delta^k(Z^n) = Z^{nq-p}$– $(nq-p)$-звезда. Если же число k иррационально, то лучи звезды Z^{n-k} заметают всю плоскость. На рис. 56 приведен пример целочисленной поляры ($n = 3,\ k = 1$), а на рис. 57 показана *полуполяра* ($n = 4,\ k = \frac{1}{2},\ nq - p = 7$).

Рис. 56. Поляра точек прямой m относительно 3-звезды, изображенной штриховыми прямыми, является 2-звездой (непрерывные прямые), при этом $\psi_i = 1,5\varphi_i$

Рис. 57. Поляра порядка 1/2 точек прямой m относительно 4-звезды (штриховые прямые) является 7-звездой (непрерывные прямые)

Уравнение целочисленной поляры исследовано в [148], а вот нахождение уравнения дробной поляры – вопрос открытый.

Измятые пространства

Предмет, о котором пойдет речь, кажется давно всем хорошо знакомым. Однако мы посмотрим на него с новой стороны, тем более, что любой из нас многократно наблюдал такой процесс, когда, взяв в руки гладкий лист бумаги, мог перегибать его, комкать, мять, словом, преобразовывать любым способом. А когда мы разворачивали получившийся продукт нашего творения обратно в почти гладкий первоначальный лист, то могли задать себе вопрос: какие закономерности бросаются в глаза? Здесь можно поставить еще добрую дюжину вопросов, казалось бы, зависающих в воздухе, чтобы остаться совершенно без ответов на долгие времена.

Для начала рассмотрим одну задачу, которая с первого взгляда кажется не решаемой.

Задача. Поэт нервно превратил в твердый шарик очередной лист бумаги (формата А4 для принтеров) с тремя лирическими строчками. Физик проколол сей шарик тонкой иглой насквозь и спросил Математика: “Когда мы разгладим шарик в ровный лист, сколько дырок от иглы мы сможем на нем обнаружить?”

Решение. Пусть лист бумаги размером $a \times b = 297$ мм$\times$210 мм (формат А4) беспорядочно скомкан в плотный шарик T радиуса R.

Сделаем несколько допущений. Во-первых, игла – очень тонкая, и она пересекает скомканную бумагу N раз. Во-вторых, сама бумага имеет реальную толщину ξ, равную приблизительно 0,1 мм, хотя, как мы покажем ниже, мы не сможем воспользоваться величиной ξ. В-третьих, учитывая силу упругости реальной бумаги, будем считать, что среднее расстояние между соседними слоями бумаги равно ε (рис. 58).

Рис. 58

В-четвертых, назвав величину ε *условной толщиной* бумаги, будем считать, что слои с такой условной толщиной плотно прилегают друг к другу по всему объему V тела T, исключая тем самым полости внутри него. В-пятых, в точке прокола угол φ между иглой и участком бумаги, который будем считать плоским, является случайной величиной

$\varphi \in (0, \pi/2]$. В-шестых, будем пренебрегать возможными пластическими свойствами бумаги.

Пусть d – длина пересечения иглы со слоем бумаги условной толщины ε (рис. 59). Тогда $d = \varepsilon / \sin\varphi$.

Рис. 59

Найдем плотность $p(\varphi)$ распределения случайной величины φ. Для этого заметим, что конец единичного радиус-вектора, проходящего под углом φ к фиксированной плоскости, описывает окружность радиусом $r = \cos\varphi$, длина которой равна $2\pi\cos\varphi$. Но площадь единичной полусферы равна 2π, поэтому $p(\varphi) = \cos\ \varphi$, причем выполняется условие нормировки $\int_0^{\pi/2} p(\varphi) d\varphi = 1$, ибо $\int_0^{\pi/2} \cos\varphi\ \ d\varphi = [\,\sin\varphi\,]\ {}_0^{\pi/2} = 1$.

Так как математическое ожидание ψ случайной величины φ равно

$$\psi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi\ \cos\ \varphi\ d\varphi = \varphi\ \sin\ \varphi\ \Big|_0^{\pi/2} - \int\limits_0^{\pi/2} \sin\varphi\ d\varphi = \tfrac{\pi}{2} - 1,$$

то в среднем величина d равна $d_0 = \varepsilon / \sin\psi = \varepsilon / \cos 1$. Следовательно,

$$N = \tfrac{2R}{d_0}.$$

Вычислим двумя способами объем V. С одной стороны, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$; с другой стороны, $V = ab\varepsilon$. Следовательно,

$$\varepsilon = \tfrac{4\pi R^3}{3ab}.$$

Значит,

$$N = \tfrac{2R}{d} = \tfrac{2R\cos 1}{\varepsilon} = \tfrac{2R \cdot 3ab\cos 1}{4\pi R^3} = \tfrac{3\cos 1}{2\pi} \cdot \tfrac{ab}{R^2} = \mu ab R^{-2}$$

где $\mu = \frac{3\cos 1}{2\pi} = 0,257976$. Поскольку $a = 297, b = 210$, то $N = 16089.94R^{-2}$. Эксперимент показывает, что диаметр $2R$ тела T равен приблизительно 35 мм. Таким образом, $N \approx 52,5385537 \approx 53$.

Таблица 18

$2R$	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
N	133	122	112	103	95	88	82	77	72	67	63	59	56	53	50	47	45	42	40

В табл. 18 показаны некоторые значения числа N в зависимости от диаметра бумажного шарика. При достаточно больших физических усилиях можно уменьшить диаметр шарика до 25 мм. Тогда число проколов будет равно 103. Предположим, удалось сжать шарик до такого состояния, когда условная толщина ε сравняется с реальной толщиной ξ. Оказывается, диаметр такого шарика станет равным приблизительно 22,8 мм, а игла прошьет 124 слоя.

Это – максимальный результат при данном способе деформации листа формата А4. Возникает вопрос: если специальным образом изгибать лист такого формата, то каково максимальное число проколов, которые можно сделать достаточно тонкой иглой за один раз? Один из вариантов – следующий. Если лист изгибать "змейкой" самым экономным образом в продольном направлении, а затем подвести нижний край листа к верхнему, то число проколов будет равно 1336 (при условии, что диаметр иглы равен $\xi = 0{,}1$).

Задача. Если бы в предыдущей задаче Физик разрезал комок ножом и расправил его в первоначальный лист, то какова была бы длина линии разреза?

Решение. В сечении мы получим круг площадью S, внутри которого находится линия разреза, скорее всего, распавшаяся на много частей. Для решения задачи нам важно знать среднее расстояние ε между ближайшими, "параллельными", участками разреза. Тогда $\varepsilon = \frac{4}{3ab}\pi R^3$, поэтому

$$L = \frac{\pi R^2}{\varepsilon} = \frac{3ab}{4R} = \frac{18710}{70} = 2673\text{мм} \quad ,$$

т.е. длина разреза будет более двух с половиной метров.

Размерность. Пусть для простоты бумажный лист имеет форму квадрата с единичной стороной и является очень тонким, т.е. его реальная толщина ξ – конечная величина, близкая к нулю (напомним, что ε – условная толщина, причем $\xi < \varepsilon$). После того, как мы хаотично превратили лист бумаги в комок F радиуса R, можно поставить вопрос о размерности Минковского D_0 фигуры F, которая, очевидно зависит от точки зрения наблюдателя. Другими словами, D_0 зависит от размера δ кубиков – клеток, которыми мы покроем множество F.

Если $R << \delta$, то $D_0 = 0$, и F воспринимается нами как точка.

Если $\varepsilon < \delta < R$, то $D_0 = 3$, и F воспринимается как однородное тело.

Если $\xi < \delta < \varepsilon$, то локально F имеет структуру 2-мерной этажерки в 3-мерном пространстве, описанной в п. 8, §3. Поэтому мы должны считать в этом случае, что $D_0 \approx 5/2$. Этот результат не согласуется с размерностью, вычисленной в работе [119], где указывается, что $D_0 \approx 7/3$. (Заметим, что для n-мерного пространства мы в п. 8, §3, нашли $D_0 = (n+2)/2$, а [119] считается, что $D_0 = (n+4)/3$ при $n < 8$ и $D_0 = 4$ при $n > 7$.)

Если $\delta < \xi$, то $D_0 = 3$.

Если $\delta << \xi$, то D_0 зависит от физической микроструктуры бумаги.

Деформация условий. Обобщим седьмой способ (стр. 379), продеформировав начальные данные, например, изменив размерность объемлющего пространства. Заметим, что при построении канторова множества мы исходили из следующих начальных данных:

1°. Дано упорядоченное множество G отображений евклидовой прямой, являющихся *ограниченными* центральными симметриями. При построении канторова множества последовательно выполняются отображения из G в соответствии с упорядоченностью.

2°. Ограниченность преобразования обусловливает нелинейный характер процесса построения множества, которое является фрактальным. Суть ограничения в том, что отображение f нетождественно действует на множестве $[P(x)]$ истинности некоторого предиката $P(x)$, а на дополнении $[P(x)]'$ отображениеf действует тождественно.

Итак, мы можем попытаться, изменяя 1° и 2°, построить различные множества, деформируя начальные данные.

Перегибание бумаги. Пусть O – стартовая точка, которую мы поместим в начало координат. Задав угол φ и число $\lambda \in(0;\ 1)$, построим бесконечную последовательность точек $M_k = (\lambda^k \cos k\varphi,\ \lambda^k \sin k\varphi)$ и прямых g_k, определяемых условием $g_k \perp OM_k$. Симметрию плоскости относительно прямой g_k обозначим s_k. Тем самым определено упорядоченное семейство $S = \{\, s_1,\ s_2,\ ...,\ s_k,\ ...\,\}$ преобразований, с помощью которого мы построим множество F, предварительно записав предикат $P_k(X)$ для всех $n \in \mathbf{N}$. Предикат $P_k(X)$ есть предложение “Точки Xи O лежат по разные стороны от прямой g_k”. Перегибание f_k плоскости вдоль прямой g_k совмещает две полуплоскости. Поэтому $f_k(X) = s_k(X)$

в случае, если $X \in [P_k]$, и $f_k(X) = X$ в противном случае. Множество $[P_k]$ истинности предиката P_k является той открытой полуплоскостью с границей g_k, которая содержит O. Последовательно выполняя отображения из бесконечного множества $G = \{\, f_1,\ f_2,\ ...,\ f_k,\ ...\,\}$, мы в пределе $k \to \infty$ получим отображение f плоскости на себя. Искомое множество F есть полный прообраз точки O в отображении f, т.е. $F = f^{-1}(O)$. На рис. 60 показаны 4 примера на эту тему. Среди них имеется знаменитая кривая Коха.

Рис. 60. Фракталы, полученные посредством перегибания бумаги

Если оси симметрий g_k выбирать другими способами, то можно получать различные фракталы. В частности, выбор осей можно делать случайным образом. На рис. 61 показан один из таких случайных фракталов.

Рис. 61. Фрактал, полученный с помощью пятидесяти случайный осевых симметрий в масштабах 1, 5, 25, 125

Параллельные переносы. В предыдущем пункте семейство G строилось на основе осевых симметрий. Заменяя осевые симметрии на другие преобразования, мы будем получать другие семейства G, которые породят новые фракталы.

В частности, вместо осевых симметрий рассмотрим параллельные переносы на векторы $\overrightarrow{OM_k}$, где $M_k = (\lambda^k \cos k\varphi,\ \lambda^k \sin k\varphi)$, $\lambda = 0.85$, $\varphi = \pi/5$. В качестве предиката $P_k(X)$ возьмем условие $\overrightarrow{OM_k} \cdot \overrightarrow{OX} \leq 0$. На рис. 62 показан фрактал, полученный при указанных данных. Меняя λ и φ, можно получать фракталы с теми или иными свойствами.

Рис. 62. Фрактал, полученный с помощью параллельных переносов

Метод вариации исходных условий можно применять и в пространствах произвольной размерности.

Аттракторы квадратичных преобразований плоскости

Существует только три вида бирациональных квадратичных отображений одной проективной плоскости на другую [268]; это зависит от взаимного расположения фундаментальных точек отображения.

Квадратичное отображение с тремя различными фундаментальными точками имеет уравнения

$$y^0 : y^1 : y^2 = x^1x^2 : x^2x^0 : x^0x^1, \tag{3}$$

с двумя совпавшими фундаментальными точками – уравнения

$$y^0 : y^1 : y^2 = x^2x^2 : x^0x^1 : x^0x^2, \tag{4}$$

с тремя совпавшими фундаментальными точками – уравнениея

$$y^0 : y^1 : y^2 = (x^0x^0 + x^1x^2) : x^0x^2 : x^2x^2. \tag{5}$$

Квадратичное отображение ξ проективной плоскости $\mathbf{P}^2$ на себя называется *преобразованием* плоскости. К сожалению, это не делает уравнения (3)–(5) проще. Наоборот, они становятся более громоздкими, что является следствием наличия непрерывных проективных инвариантов (модулей) у квадратичных преобразований; так, преобразования с тремя различными фундаментальными точками имеют 6 модулей (в работе [146] доказано, что 6-мерное многообразие модулей квадратичных преобразований проективной плоскости – рациональное), а преобразования с двумя и тремя совпавшими фундаментальными точками имеют соответственно 5 и 4 модулей.

Для дальнейшего нам потребуются сведения о неподвижных точках кремоновых преобразований. Хорошо известна [271] следующая

Теорема 3.43. *Кремоново преобразование проективной плоскости степени n имеет, вообще говоря, $n+2$ неподвижных точек.*

Говорят, что точка x – *циклическая точка* или *точка цикла C_k порядка (длины)* k, если равенство $\xi^{\circ k}(x) = x$ выполняется для некоторого натурального k и не выполняется для чисел, меньших k.

Теорема 3.44. *Общее квадратичное преобразование проективной плоскости имеет:*

(а) 4 *неподвижные точки*

(б) 1 *цикл второго порядка*

(в) *m циклов порядка $k \in \mathbf{N}$, при этом m вычисляется по формуле:*

$$m(k) = \tfrac{1}{k}(2^k - 2 - \sum_{d \in D(k)} d\, m(d)),$$

где суммирование ведется по всем целым d из множества $D(k)$ всех делителей числа k, не содержащего 1 и k.

(а) следует из теоремы 3.43. Справедливость (б) следует из того, что если x – точка цикла порядка $k = 2$, то степень квадрата ξ равна $\deg \xi^{\circ 2} = 4$, следовательно, $\xi^{\circ 2}$ имеет 6 неподвижных точек, четыре из которых неподвижны при ξ, а две оставшиеся составляют цикл порядка 2 – так называемую инволютивную пару точек преобразования ξ. Индукцией по k доказывается (в).

Из (в), в частности, следует, что если p – простое число, то $m(p) = (2^p - 2)/p$; например, $m(37) = 3\ 714\ 566\ 310$. В табл. 19 приведено количество $m(k)$ циклов малой длины k общего квадратичного преобразования ξ проективной плоскости. Из теоремы 3.42 следует, что циклов квадратичного преобразования имеется сколь угодно много, и поэтому квадратичное преобразование с неизбежностью должно порождать турбулентную геометрию циклов (если под турбулентностью понимать детерминированный хаос).

Таблица 19

Длина цикла	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Число циклов	4	1	2	3	6	9	18	30	56	99	186	335	630	1161	2182	4080	7710	14532	27594	52377

Теорема 3.45. *Пусть x – произвольная циклическая точка порядка $k \in \mathbf{N}$, т.е. $\xi^{\circ k}(x) = x$, C_k – цикл, содержащий x. Тогда существует окрестность Y точки x, такая, что $Y \cap C_k = \{x\}$.*

Предположим, любая окрестность точки x содержит, по крайней мере, еще одну точку цикла C_k, отличную от x. Тогда, очевидно, C_k содержит бесконечно много точек. Противоречие.

Теорема 3.46. *Пусть X – открытое множество, состоящее только из циклических точек. Тогда в X нет непрерывных орбит преобразования ξ.*

Методы выявления неподвижных точек и так называемой центральной прямой, т.е. прямой содержащей инволютивную пару, квадратичного преобразования ξ подробно изложены в [149].

Чтобы получить из проективной плоскости – *аффинную*, достаточно выделить в $\mathbf{P}^2$ любую прямую g_∞ и объявить ее *абсолютом* (*бесконечно удаленной прямой*) аффинной плоскости $\mathbf{A}^2 = \mathbf{P}^2 \backslash g_\infty$. Например, если в качестве таковой взять прямую $x^2 = 0$, то переход от однородных проективных координат $x^0 : x^1 : x^2$ к неоднородным аффинным координатам x, y осуществляется по формулам: $x = x^0/x^2$, $y = x^1/x^2$.

Рассмотрим множество τ квадратичных преобразований расширенной аффинной плоскости, все фундаментальные точки которых и фундаментальные точки обратных им преобразований находятся на абсолюте g_∞. Обозначим через $\tau(m)$, $m \in \{2;\ 3\}$, преобразования из τ с m совпавшими фундаментальными точками. Легко подсчитать, что преобразования из $\tau(m)$ имеют $5 - m$ непрерывных инвариантов. Преобразования из τ обладают аттракторами, геометрия которых зависит от этих инвариантов.

Среди преобразований из $\tau(5)$ обычно выделяют [270] преобразования, задающиеся уравнениями:

$$x' = -ax^2 + y + 1, \quad y' = bx. \tag{6}$$

Для преобразования (6) характерны постоянство якобиана $J = -b$ и то, что фундаментальные точки находятся в бесконечности.

В работе [149] изучены аттракторы квадратичных преобразований, у которых две из трех фундаментальных точек совпадают и находятся в бесконечности. Их аттракторы являются крестообразными и неограниченными.

Общее квадратичное преобразование можно получить как композицию стандартной инволюции с уравнениями: $y^0 : y^1 : y^2 = x^1x^2 : x^2x^0 : x^0x^1$ и произвольной коллинеации. В зависимости от шести инвариантов квадратичное преобразование может обладать теми или иными свойствами. Богатство этих свойств обусловлено именно шестью проективными инвариантами. В частности, в наиболее интересных случаях квадратичное преобразование может иметь нетривиальный аттрактор, как, например, типа приведенного на рис. 63,

Рис. 63. Странный аттрактор квадратичного преобразования, полученного посредством пары корреляций (6)

или иметь бесконечно много переплетенных между собой циклов различной длины, образующие цепочки островов. Одна из таких картин приведена на рис. 64. Численные эксперименты показывают, что возможно существование цепочек островов и странного аттрактора. При этом размерность странного аттрактора должна быть близкой к 2.

Рис. 64. Иерархическое семейство сверхдлинных циклов квадратичного преобразования

Любое квадратичное преобразование проективной плоскости можно задать с помощью двух корреляций. По определению, корреляция с матрицей $A = (a_{ij})$, $i,\ j\ \in \{0,\ 1,\ 2\}$ отображает проективную плоскость $\mathbf{P}^2$ на двойственную плоскость $\mathbf{P}^{2*}$, при этом точке $X = (x^i) \in \mathbf{P}^2$ отвечает прямая $u = (u_i) \in \mathbf{P}^{2*}$, такая, что $u_i = a_{ij}x^j$.

Если заданы две корреляции A, B, то отображение

$$\xi : X \mapsto X' = A(X) \cap B(X),$$

при котором точке X ставится в соответствие точка X' пересечения прямых $A(X)$ и $B(X)$, в общем случае является квадратичным. Это означает, что координаты образа являются квадратичными формами от координат прообраза; геометрически преобразование ξ отображает прямую на конику.

Рассмотрим примеры. Корреляции

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0 & -29 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 37 & 63 & -15 \\ 0 & 37 & 76 \\ 100 & 0 & 37 \end{pmatrix} \tag{7}$$

порождают квадратичное преобразование, у которого есть странный аттрактор, часть которого показана рис. 65.

Рис. 65. Странный аттрактор квадратичного преобразования, порожденного корреляциями (7)

Странный аттрактор, изображенный на рис. 63, получен в квадратичном преобразовании, порожденном корреляциями

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & -19 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 38 & 62 & -10 \\ 0 & 38 & 74 \\ 35 & 0 & 38 \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Глава 4

Организация опытно-экспериментальной работы

В этой главе исследуются критерии эффективности и результативности функционирования дидактической системы математического образования будущих учителей математики и ее компонентов на основе наглядного моделирования и статистического анализа результатов опытно-экспериментальной работы. Критерии эффективности определяются качеством усвоения базовых знаний, умений, навыков и методов (профессиональных и фундаментальных), уровнем сформированности математического мышления и культуры, уровнем сформированности творческой активности студентов, уровнем профессиональной идентификации личности будущей профессии.

4.1. Основные этапы и организация исследования

На первом этапе анализировалось состояние математического образования будущих учителей математики. Изучались вопросы организации и состояния учебно-воспитательного процесса в педвузах, деятельности учителей математики, состояние профориентационной работы. В результате было установлено преобладание экстенсивных методов обучения математике, формализм усвоения основных математических понятий, отсутствие целостного представления о математике, закономерностях ее развития и основных структурах у будущих учителей математики. Были выявлены слабое влияние психолого-педагогической теории обучения на выбор методов, форм и средств вузовского преподавания математики, слабая профессионально-педагогическая направленность математической подготовки студентов педвузов; содержание и структура математической подготовки слабо коррелировали с изменениями в школьном математическом образовании; имели устойчивую тенденцию к сокращению объемов аудиторной нагрузки. В результате этого исследования возникла гипотеза о необходимости оптимизации математического образования студентов за счет усиления структурного компонента школьной математики, проектирования наглядности обучения математике и моделирования учебной деятельности студентов.

На втором этапе исследования был разработан первый вариант концепции математического образования студентов педвузов на основе усиления структурного компонента школьной математики и расширительного толкования наглядного обучения в высшей школе. Особое внимание было уделено углублению фундаментальной составляющей математической подготовки за счет рационального моделирования понятий, методов, учебных действий (как внешних, так и внутренних), тем, разделов, дисциплин, учебных программ. Изучались различные подходы к наглядному обучению математике, в том числе развивающая трактовка А. Н. Леонтьева (“внешняя опора для внутренних действий обучаемых”), В. Г. Болтянского (“изоморфизм плюс простота”), Л. М. Фридмана (“свойство перцептивного образа”), В. В. Давыдова (“моделирование”), Н. Г. Салминой (“выделение существенного в плане восприятия”) и др. применительно к математической деятельности. Была определена концепция наглядного моделирования в обучении математике в педвузе, изучены ее структурные компоненты, психологические и физиологические закономерности системогенеза, типология видов наглядности в обучении математике. На этом этапе были созданы модель и система математического образования на основе разработанных принципов, критериев и концепции. Апробировались различные формы и средства организации учебной деятельности студентов в рамках действующей педагогической системы математической подготовки.

На третьем этапе исследования продолжалось изучение различных педагогических систем математического образования будущих учителей математики, уточнялись и обобщались концепция исследования и компоненты авторской модели дидактической системы математического образования; производилась технологическая и практическая проработка концепции наглядного моделирования как структурообразующего фактора математического образования во всех его структурных компонентах; реализовалась на практике концепция исследования путей внедрения конкретных методик обучения математике на основе технологии наглядного моделирования в обучении; осуществлялась опытно-экспериментальная работа с контрольным и экспериментальным изучением деятельности студентов. Давались обоснования (в том числе методами статистического анализа) полученным в ходе исследования результатам.

Основной опытно-экспериментальной базой исследования служили физико-математический факультет Ярославского педуниверситета, Институт повышения квалификации учителей Ярославской области, средние школы № 33, 52, 59, 76 г. Ярославля. На этом этапе исследования проводились на протяжении более чем 10 лет.

Проведенный констатирующий эксперимент в педвузе и средней школе преследовал следующие задачи: определить уровень представлений учителей математики старших классов о наглядном обучении, оценить уровень предметных знаний студентов, развитие их интеллектуальной (тест Амтхауэра) и мотивационно-личностной сферы (терминальные ценности), оценку черт личности (тест Кеттелла) и показателей, характеризующих уровень профессиональной идентичности личности (профессиональная самооценка, удовлетворенность взаимоотношениями, уровень тревожности, удовлетворенность профессией и т.д.), определить социальный состав абитуриентов, качество профориентационной работы, влияние качества обучения и других факторов на количественные показатели результативности трудоустройства выпускников. Полученные результаты свидетельствовали о некоторых недостатках в функционировании действующей дидактической системы математического образования и ставили вопрос о ее развитии и совершенствовании.

Формирующий эксперимент был направлен на уточнение и проверку выдвинутой гипотезы исследования и был проведен в следующих направлениях:

– определение уровня развития интеллектуальной и личностно-мотивационной сферы, оценка черт личности и профессиональной идентичности личности профессии учителя, удовлетворенность профессией и т.п. для экспериментальных выборок студентов с I по V курс;

– определение результативности уровневой дифференциации по психологическому принципу в контексте реализации авторской дидактической системы математического образования;

– определение эффективности формирования творческой активности студентов в процессе наглядного моделирования в обучении математике;

– определение эффективности дидактической системы математического образования по результатам профессиональной деятельности выпускников (учителей математики школ г.Ярославля);

– определение эффективности применения отдельных технологических модулей концепции наглядного моделирования в обучении математике (информационные технологии, сквозные темы).

В педагогическом эксперименте были использованы следующие методы: анализ научной литературы, анкетирование, контрольные срезы знаний, результаты государственных и курсовых экзаменов. Все данные сводились в статистические таблицы, сравнивались, анализировались, подвергались статистической обработке. При этом определялись такие показатели, как “изменение коэффициента усвоения объема математических понятий”, “средний балл уровня знаний по учебной дисциплине”, “коэффициент стремления к достижению результатов учебной деятельности”, “относительная частота проявлений инициативной потребности моделирования” и др.

Исследование показало положительную динамику и достоверность результатов по всем обозначенным направлениям.

4.2. Критерии эффективности наглядного моделирования в обучении математике и организации учебной деятельности студентов

Проектирование дидактической системы математического образования будущих учителей математики и определение технологических параметров организации учебного процесса предполагают нацеленность на получение эффективных результатов функционирования педагогического процесса. Эффективная организация учебно-познавательной деятельности студентов в рамках дидактической системы требует реализации важных для математической деятельности дидактических принципов: фундирования, целостности, профессионализации, наглядно-модельного обучения, оптимальности, модульности, развивающего обучения. При этом эффективность функционирования дидактической системы полностью определяется значимостью ее структурообразующих факторов: концепцией фундирования и наглядного моделирования в обучении математике, доминантой школьного математического знания как основы фундирования вузовского математического знания, профессионально-педагогической направленностью математического образования и стимулированием творческой активности студентов в процессе профессиональной подготовки.

В связи с этим дидактическая система математического образования будущих учителей математики впервые детально исследуется, как сложный целостный процесс, включающий в себя перцептивные, мнемические, педагогические и технологические компоненты, в том числе технологию фундирования базовых школьных математических знаний.

Управление познавательной деятельностью обучаемых в процессе фундирования и наглядного моделирования в обучении математике является основным содержательным компонентом педагогической технологии и полностью определяется совместной деятельностью учителя и обучаемых в решении дидактических задач. Причем сукцессивность опознания и проявление сущности математического объекта могут быть вызваны развертыванием когнитивного процесса не только на уровне анализа стимула, но и на более высоких уровнях: выбора эталона и сличения, формирования ответа и развития когнитивных механизмов и креативных мыслительных процессов.

Так как дидактические процессы рассматриваются нами в трех уровнях: субъект обучения (обучаемый); учитель (транслятор) (вербальный, невербальный, ТСО, учебные пособия, мультимедиа и т.п.); содержание обучения, то определим следующие критерии эффективности дидактической системы математического образования будущих учителей математики:

1 – уровень усвоения базового (школьного) математического знания (профессиональный уровень);

2 – уровень усвоения базового фундаментального математического знания (фундаментальный уровень);

3 – уровень развития общеучебных и профессиональных умений, творческой активности студентов;

4 – уровень развития личностных качеств и интересов студента (интеллектуальных, мотивационных, оценка черт личности);

5 – уровень профессиональной идентичности личности (профессиональная самооценка, удовлетворенность взаимоотношениями, уровень тревожности, удовлетворенность профессией и т.п.);

6 – уровень дифференциации и взаимодействия в процессе обучения математике.

Принципиальный вопрос эффективности дидактической системы – это затраты учебного времени и объективность контролирующей функции. Оба вопроса чрезвычайно сложны и не поддаются однозначной оценке. Вряд ли можно согласиться с В. П. Беспалько [42] в оценке эффективности учебного занятия: процесс усвоения знания, формирование умения – процесс, который не начинается и не заканчивается на аудиторном занятии, то есть во время прямого контакта с учителем (транслятором) (вербальным или невербальным). Довольно легко привести примеры, когда замкнутый направленный и автоматизированный алгоритм усвоения (высший уровень организации алгоритма) дает поверхностные, непрочные знания, следы которых (остаточные фреймы) быстро стираются в памяти обучаемых. В то же время традиционное обучение (разомкнутое и рассеянное по В. П. Беспалько) при условии оптимальной реализации психофизиологических закономерностей восприятия и адекватного представления знаний, организованной самостоятельной работы (контролируемой или нет) может привести к формированию устойчивых знаний на высоком уровне усвоения. Поэтому определять эффективность учебного процесса по затратам учебного времени (когда основная интеллектуальная нагрузка: интериоризация знаний, уточнение деталей, сравнение, воспроизведение и т.п. – приходится на внеаудиторное время) при обучении математике в педвузе кажется в настоящее время нерациональным.

В то же время объективность и оптимальность реализации контролирующей функции при условии диагностируемого целеполагания дидактической системы математического образования будущих учителей математики (будь то рейтинговая или балльная системы оценивания) предполагается a priori и определяется уровнем квалификации преподавательских кадров и качеством организации учебного процесса.

Педагогический процесс обучения имеет своей конечной целью формирование личности с заданными качествами, поэтому необходимым компонентом исследования эффективности дидактической системы является определение исходного состояния личности (опыт личности, типологические свойства, качества мышления, опыт эмоциональной и волевой деятельности). Поэтому конкретизация критериев 4 и 5 в исходном состоянии личности и в динамике развертывания педагогического процесса обучения математике дает необходимый срез профессиональной готовности к учительскому труду.

На стадии профессионального образования ведущими формальными критериями соответствия социальным требованиям являются показатели академической успеваемости (по предметам математического, общекультурного и методического цикла, включая итоги педпрактики), ведущими содержательными показателями выступают – уровень сформированности системы педагогической деятельности: структура предметных, методических знаний, умений, способностей, наличие уровня сформированности педагогической направленности – как основы готовности к педагогической деятельности.

Ведущими формальными показателями соответствия учительской профессии субъективным требованиям выступают – удовлетворенность учебной и будущей профессионально-педагогической деятельностью, отношение к себе как к профессионалу и ряд других. С содержательной стороны данный параметр оценивается степенью принятия профессии и себя как профессионала (реального или потенциального), а также тем, насколько различные аспекты деятельности становятся предметом удовлетворения потребностей, интересов, убеждений человека.

Для оценки объективных требований, предъявляемых к личности и деятельности учителя, использовались следующие показатели и методики:

– академическая успеваемость по предметам математического цикла;

– экспертная оценка математических знаний и умений;

– экспертная оценка методических знаний и умений;

– оценка уровня развития интеллекта (тест Амтхауэра);

– оценка соответствия интересов, желаний, способностей и умений студента реальным возможностям и требованиям педагогической деятельности (оценка соответствия типа личности реальным возможностям и требованиям педагогической деятельности) – тест Холланда.

Для оценки субъективных требований, предъявляемых студентом к содержанию и условиям педагогической деятельности, использовались следующие показатели и методики:

– удовлетворенность взаимоотношениями в студенческой группе;

– прогнозирование реализуемости ценностей личности в условиях педагогической деятельности (методика Рокича).

– уровень реактивной и личностной тревожности (методика Спилберга-Ханина);

– различные виды профессиональной самооценки.

Кроме того в ходе обследования диагностировался тип личности студента с использованием 16-ти факторного опросника Кеттелла.

В психодиагностическом обследовании под руководством профессора Ю. П. Поваренкова приняли участие 140 студентов I–V курсов физико-математического факультета, в среднем по 28 человек с курса. Обследование проводилось с группами студентов по 15–20 человек в период с апреля по май, в 2 сеанса, примерно по 2 часа. Отбор испытуемых осуществлялся в случайном порядке.

Полученные на каждого испытуемого диагностические данные усреднялись по курсам или по другим основаниям. При статистической обработке использовались методы корреляционного, дисперсионного и факторного анализа. Проверка статистической достоверности результатов осуществлялась с использованием критериев Стьюдента, Фишера, Хи-квадрат.

Полученные в ходе диагностических замеров данные на каждого из 140 студентов группировались по курсам и другим основаниям, подвергались различным видам статистической обработки (корреляционный, дисперсионный и факторный анализ, оценка значимости отличий по различным критериям). Обобщенные и сгруппированные данные сводились в таблицы и представлялись в графической форме.

Таблица 20

Показатели успешности профессионального обучения студентов физико-математического факультета

Таблица 21

Таблица 22

Соотношение и взаимосвязь академической успеваемости по математическим дисциплинам и экспертных оценок сформированности математических знаний и умений

Примечание: [3] значимость не более 0,999; [2] значимость не более 0,99.

В целом обученность студентов по предметам математического цикла педуниверситета с I по V курс растет. Однако процесс профессионального становления учителя на данной стадии осуществляется неравномерно. На это указывают периоды резкого повышения и снижения показателей обученности, наличие положительных и отрицательных пиков, смена направления динамики изменения показателей с прямого на обратное. В основе неравномерности лежит активная перестройка механизмов профессионального становления, смена его детерминант и ориентиров, перестройка системы учебной деятельности студентов и динамика их отношения к ней.

Диагностика интеллекта осуществляется с использованием теста Амтхауэра, который хорошо зарекомендовал себя при изучении студентов вузов как у нас в стране, так и за рубежом. Данный тест включает 9 субтестов и позволяет осуществлять диагностику 9 параметров интеллекта и общего уровня развития интеллекта (IQ), который определяется на основе суммирования результатов по отдельным субтестам.

Полученные в ходе диагностики данные представлены в таблице 23 и 24. Они включают нормированные баллы, которые подсчитываются на основе шкал, разработанных в центре “Психодиагностика” при Ярославском государственном университете.

Анализ результатов позволяет зафиксировать следующие факты:

– средний уровень IQ у студентов ФМФ равен 110,3 баллов;

– минимальный уровень IQ зафиксирован на I курсе и равен 103,8 балла;

– максимальный уровень IQ зафиксирован на V курсе и равен 114,5 балла;

– с I по III курс отмечается резкий скачок в уровне интеллектуального развития студентов (со 104 до 113 баллов);

– с I по V курс уровень интеллектуального развития увеличивается незначительно, со 113 до 114 баллов.

Итак, общий вывод, который вытекает из полученных данных, заключается в следующем: уровень интеллектуального развития студентов увеличивается по мере обучения в педагогическом вузе, причем на младших курсах он растет значительно быстрее, чем на старших.

Таблица 23

Развитие интеллекта студентов ФМФ
(тест Амтхауэра)

Таблица 24

Связь между успеваемостью и интеллектом не остается одинаковой на всех курсах: на I, III и V курсах прямая связь отсутствует, а на II и IV достигает значимой величины (0,95). Не остается постоянной в период обучения в педвузе и связь интеллекта с экспертными оценками, включая оценки математических способностей, и математических знаний.

Уровень математических способностей и математических знаний коррелирует с интеллектом на II, IV и V курсах; на I и III курсе связь отсутствует. Не коррелирует с интеллектом ни на одном курсе экспертная оценка – прогноз профессиональной успешности. Говоря другими словами, преподаватели-эксперты не видят прямой связи между уровнем интеллектуального развития студентов и их профессионально-педагогическими успехами.

Представляет интерес анализ корреляции экспертных оценок с результатами отдельных субтестов. На первом курсе с оценкой математических способностей коррелирует лишь 7-й субтест и то отрицательно, т.е. чем выше уровень развития данного параметра интеллекта, тем ниже следует ожидать уровень математических знаний и математических способностей у студентов. На II курсе математические способности и математические знания коррелируют с 5-м и 8-м субтестами, на III курсе – с 9-м субтестом (отрицательно), на IV курсе – с 3-м и 4-м, а на V курсе с 1-м и 7-м. Эти данные свидетельствуют, что на разных курсах на процесс освоения предметных знаний по математике влияют разные интеллектуальные действия.

Таким образом, функционирование дидактической системы математического образования приводит к устойчивому росту большинства показателей личностных и профессиональных качеств студентов, что отражает уровень эффективности дидактической системы. Методика проведения соответствующих замеров, подбор измерителей качественных признаков, способы статистического анализа данных и корреляция с технологическими параметрами организации и управления познавательной деятельностью студентов создают **психолого-диагностический комплекс** мониторинга функционирования дидактической системы. Определив теперь оптимальные значения показателей для репрезентативной совокупности успешно работающих учителей математики (возможно, по возрастным группам), создаем прецедент для совершенствования и развития дидактической системы (или ее элементов) по данным корреляционного анализа внутреннего мониторинга и оптимальных значений показателей.

Эффективность дидактической системы математического образования будущих учителей математики по критерию 3 определяется формированием творческой активности студентов в процессе обучения математике.

Экспериментальная работа по диагностике и становлению творческой активности студентов физико-математического факультета ЯГПУ проводилась в течение 6 лет в процессе чтения обязательных математических курсов.

На подготовительном этапе констатирующего эксперимента решались следующие задачи:

– отбор содержания учебного материала, удовлетворяющего целям и задачам исследования;

– выбор экспериментальных и контрольных групп студентов для будущего исследования;

– анализ и выделение методических приемов и видов наглядного обучения математике, ориентированных на творческую активность обучаемых;

– разработка методических рекомендаций, листов анкетирования и опросов, учебных пособий и монографий по теме исследования.

В ходе формирующего эксперимента изучалось влияние новой методики решения математических задач средствами наглядного моделирования на становление творческой активности студентов.

Целью проведения констатирующего и формирующего экспериментов были

– определение и анализ уровня творческой активности студентов в процессе проведения лекций, практических и лабораторных занятий, внеаудиторных форм работы (качественного и количественного);

– корреляция между уровнем творческой активности студентов и качеством знаний, умений и навыков, формируемых в учебном процессе;

– определение вариативности, новизны, самостоятельности решения студентами математических задач по курсу “Теория вероятностей и математическая статистика”;

– моделирование, сбор данных, рефераты с творческой ориентацией, участие в научных конференциях, наличие курсовых и дипломных работ по вероятностно-статистической тематике.

Качественные и количественные признаки творческой активности студентов определялись накануне и по окончании чтения обязательных курсов: “Теория вероятностей и математическая статистика”, “Математический анализ”, “Геометрия”, “Алгебра”.

I уровень. В предварительном и основном эксперименте принимали участие 428 студентов (за пять лет проведения эксперимента) дневного отделения специальности “математика”. На 8 лекциях, 8 практических занятиях в первые два и последние два месяца учебных занятий (сентябрь, октябрь, апрель, май) отслеживались количественные характеристики следующих качественных признаков творческой активности студентов (физико-математический факультет):

Лекционные занятия (ЛК):

$x^{(1)}$– относительная частота проявления квазиисследовательской творческой деятельности студентов (новизна реальных ответов на поисковые вопросы, предложение вариативности решений поставленных целевых задач, постановка новых проблем в процессе работы с учебным материалом, проявление критического отношения к содержанию, структуре, способу изложения учебного материала).

Число проявлений	Количество студентов

Практические занятия (ПК):

$x^{(2)}$– относительная частота проявлений инициативной потребности **моделирования** у студентов как средство решения математических задач; предложение вариативности решений поставленных целевых задач.

Число проявлений	Количество задач

Успеваемость:

$x^{(3)}$– средний балл успеваемости по математическому анализу, алгебре, геометрии, теории вероятностей и математической статистике (по результатам летних сессий); средний балл усвоения математического содержания по курсу ТВ и МС [1].

Результативность:

$x^{(4)}$– относительная частота наличия курсовых и дипломных работ, рефератов с творческой ориентацией, участие в научных конференциях по вероятностно-статистической тематике (проверяется на выпускном курсе для экспериментальной и контрольной групп).

Выборка вариант $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ производилась в экспериментальной и контрольной группах студентов III курса специальности “математика” 2 раза в год (по 8 выборок лекционных и практических занятий в начале учебного года – сентябрь, октябрь – и по 8 выборок соответственно в конце учебного года – апрель, май) в течение 5 лет. Сравнительный анализ проводился по следующим годовым дисциплинам: математический анализ, алгебра, геометрия, теория вероятностей и математическая статистика (констатирующий эксперимент), а по последней дисциплине – также формирующий эксперимент (таблица 25).

Таблица 25

Учебный год	III курс		Σ	Дисциплины
	Контр. группа	Экспер. группа		
1991/1992	46	43	89	МА, А, Г, ТВ и МС
1992/1993	41	48	89	МА, А, Г, ТВ и МС
1993/1994	43	41	84	МА, А, Г, ТВ и МС
1994/1995	40	44	84	МА, А, Г, ТВ и МС
1995/1996	35	47	82	МА, А, Г, ТВ и МС
Σ	205	223	428	

Таблица 26

Лекционные занятия (все числовые данные в таблицах умножены на 100)

ЛК-К	Контрольная группа							
Учебный год	Дисциплины							
	МА		А		Г		ТВ и МС	
Начало Конец 2001/2002	14	14	11	13	13	15	11	12
Разница	$d_1^1 = 0$		$d_1^1 = 2$		$d_1^1 = 2$		$d_1^1 = 1$	
2002/2003	12	13	9	10	12	11	14	16
	$d_2^1 = 1$		$d_2^1 = 1$		$d_2^1 = -1$		$d_2^1 = 2$	
2003/2004	11	13	12	14	16	14	13	15
	$d_3^1 = 2$		$d_3^1 = 2$		$d_3^1 = -2$		$d_3^1 = 2$	
2004/2005	16	18	13	14	13	16	11	13
	$d_4^1 = 2$		$d_4^1 = 1$		$d_4^1 = 3$		$d_4^1 = 2$	
2005/2006	14	15	10	12	15	15	12	13
	$d_5^1 = 1$		$d_5^1 = 2$		$d_5^1 = 0$		$d_5^1 = 1$	
$\bar{d}^1$	1,2		1,6		0,4		1,6	
$s_{\bar{d}^1}^{(1)}$	1,27		1,03		1,13		0,94	
t_Φ	0,95		1,55		0,35		0,70	

Здесь $\bar{d}^1$ – средняя разница по годам выборочных средних $\bar{x}_m^1$ ($m = 1, 2$), $s_{\bar{d}^1}^{(1)}$ – ошибка разности выборочных средних, t_Φ – критерий достоверности различий для параметрического t – критерия Стьюдента. Расчеты проводились для 1% уровня значимости при условии нормального распределения выборок. Тогда критическое значение t – критерия Стьюдента для числа степеней свободы $k = 5 + 5 - 2 = 8$ найдем по таблице приложений критических значений, $t_{st} = 3,36$.

Фиксировавшийся размах варьирования признаков показал репрезентативность выборки. Именно: ошибка репрезентативности выборочной средней выражается формулой (по выборке лекционных и практических занятий)

$$s_{\bar{x}}^{(i)} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\left(x_j^{(i)} - \bar{x}_m^{(i)}\right)^2}{n(n-1)}}, \quad (i, m = 1, 2;\ n = 8),$$

а

$$C_s = \frac{s_{\bar{x}}}{\bar{x}} \cdot 100\% \qquad (Z)$$

показывает близость выборочной средней к генеральному параметру. Показатель C_s считается вполне удовлетворительным, если варьирует в пределах 3–5%.

Покажем, например, как были получены выборки из 8 вариантов для вертикальной графы “ТВ и МС” в таблице 27 (экспериментальная группа 1991/1992 уч.г.).

В 1991/1992 учебном году признак $x^{(1)}$ варьировал следующим образом:

начало	0,14	0,13	0,12	0,14	0,12	0,11	0,13	0,15	$\bar{x}_1^1 = 0,13$;
конец	0,15	0,16	0,19	0,20	0,21	0,19	0,18	0,16	$\bar{x}_2^1 = 0,18$.

Разница d^1 между средними показателями равна 0,05. Для определения репрезентативности выборки воспользуемся формулой (Z)

$$C_{s_m^1} = \frac{s_{\bar{x}_m^1}}{\bar{x}_m^1} \cdot 100\% \quad (m = 1, 2).$$

Именно: $C_{s_1^1}$ =3,5%, $C_{s_2^1}$ =4,2%, что показывает репрезентативность выборки. Отметим, что показатель C_s варьировал в таблицах 26 и 27 в пределах от 2,5% до 4,4%.

Таблица 27

ЛК-Э Экспериментальная группа

Учебный год	Дисциплины							
	МА		А		Г		ТВ и МС	
Начало Конец	13	15	11	11	16	17	13	18
2001/2002 Разница	$d_1^1 = 2$		$d_1^1 = 0$		$d_1^1 = 1$		$d_1^1 = 5$	
2002/2003	11	15	9	11	13	13	12	18
	$d_2^1 = 4$		$d_2^1 = 2$		$d_2^1 = 0$		$d_2^1 = 6$	
2003/2004	9	11	8	10	7	10	6	13
	$d_3^1 = 2$		$d_3^1 = 2$		$d_3^1 = 3$		$d_3^1 = 7$	
2004/2005	12	16	10	13	7	9	9	15
	$d_4^1 = 4$		$d_4^1 = 3$		$d_4^1 = 2$		$d_4^1 = 6$	
2005/2006	11	15	7	11	8	10	9	16
	$d_5^1 = 4$		$d_5^1 = 4$		$d_5^1 = 2$		$d_5^1 = 7$	
$\bar{d}^1$	3,2		2,2		1,6		6,2	
$s^{(1)}_{\bar{d}^1}$	1,10		0,86		2,34		1,56	
t_Φ	2,91		2,56		0,68		3,97	

Таким образом, для экспериментальной и контролирующей групп в ходе 5-летнего эксперимента чтения одинаковых лекционных курсов и проведения практических занятий при корреляции по годам средней успеваемости групп на начало эксперимента получено следующее варьирование разницы средних d_i^1 по годам для дисциплин “ТВ и МС” (с множителем 100):

эксперимент	5	6	7	6	7	$\bar{d}_э^1 = 6,2;$
контроль	1	2	2	2	1	$\bar{d}_k^1 = 1,6.$

Разница $\bar{d}^1 = \bar{d}^1_э - \bar{d}^1_k$ между средними показателями равна 4,6. Для определения ошибки этой разницы предварительно рассчитаем

$$\sum_{i=1}^{5}(d^1_i - \bar{d}^1)^2 = \sum_{i=1}^{5} d^2_i - \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{5} d_i\right)^2}{5}.$$

Для $\bar{d}^1_э$ получим 2,8, для $\bar{d}^1_k$ – 1,2. Отсюда ошибка средней разности

$$s_{\bar{d}^1} = \sqrt{\frac{\bar{d}^1_э - \bar{d}^1_k}{5 \cdot 4}} \approx 0,45$$

и

$$t_Ф = \frac{\bar{d}^1}{s_{\bar{d}^1}} \approx 10,2.$$

В таблице приближенных значений для 1% уровня значимости и числа степеней свободы $k = 8$ находим $t_{st} = 3,36$. Поскольку $t_Ф > t_{st}$, нулевая гипотеза H_0 опровергается на 1%-м уровне значимости ($P < 0,01$). Разница между средними величинами опыта и контроля оказалась достоверной.

Это свидетельствует о достоверности роста и формирования творческой активности студентов в процессе решения математических задач посредством интеоризации наглядного опыта.

Анализ становления приемов моделирования и вариативности решения математических задач на практических занятиях по ТВ и МС (признак $x^{(2)}$) показывает устойчивую положительную разницу между средними величинами в контрольной и экспериментальной группах $\bar{d}^2 = 3,7$, причем $t_Ф = 5,4 > t_{st} = 3,36$, так что разница между средними величинами статистически достоверна.

Таким образом, формирование творческой активности на уровне наглядного моделирования и вариативности решения математических задач становится достоверным педагогическим фактом.

4.3. Результативность функционирования дидактической системы математического образования

На подготовительном этапе констатирующего эксперимента решались следующие задачи: отбор содержания учебного материала, соответствующего целям исследования; выбор экспериментальных и контрольных групп; разработка опросных листов и листов анкет, методических рекомендаций, учебных пособий и литературы.

Исследование показало, что расширительное толкование наглядного обучения математике, уточненное нами применительно к наглядно-модельному обучению математике в педвузе, существенно отличается от традиционных взглядов на наглядное обучение. Последние доминируют в представлениях учителей старших классов о наглядном обучении.

Анализируя результаты анкеты, проведенной среди учителей Ярославской области (всего 67 респондентов) (см. таблицу 28), можно утверждать, что большинство из них считают основной характеристикой наглядного обучения математике чувственное восприятие, причем данный показатель (по шкале Чеддока) слабо коррелирует ($r_{pirson} = 0,34$, $r_{\text{чупров}} = 0,1$) со стажем учителей и звеном школьного образования, в котором работают преподаватели математики.

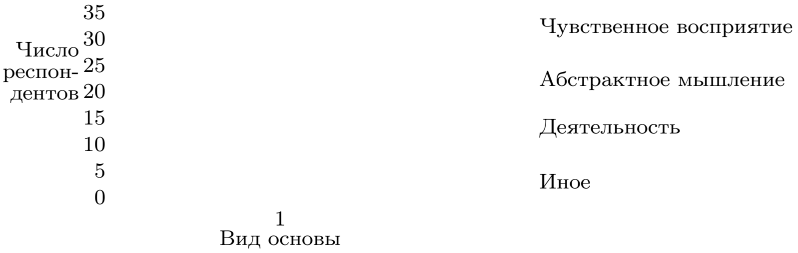
Мы пользовались непараметрическим методом оценки корреляционной связи показателей педагогической деятельности – вычислением коэффициентов взаимной сопряженности Пирсона и Чупрова. Второй показатель статистически более точен и служит более веским аргументом для подтверждения наших выводов.

Таблица 28

Стаж учителя	Чувственное восприятие	Абстрактное мышление	Деятельность (процесс)	Иное	Сумма
до 10	12	5	1	1	19
от 11 до 20	17	4	9	–	30
от 21 до 30	1	4	4	3	12
более 30	2	1	2	1	6
Σ	32	14	16	5	67

Диаграмма 1

Основная характеристика наглядного обучения (опрос учителей)



Отвечая на вопрос о том, как влияет наглядное обучение на качество знаний учащихся, большинство учителей (73%) указали, что оно служит доступным средством формирования как упрощенного, так и сложного знания (таблица 29).

Таблица 29

Стаж	Поверхностные знания	Глубокие знания	Доступные знания	Иное	Сумма
до 10	2	1	13	3	19
от 11 до 20	2	2	24	–	28
от 21 до 30	1	2	9	3	15
более 30	–	–	3	2	5
Σ	5	5	49	8	67

Данный показатель также слабо коррелировал ($r_{pirsin} = 0,2$, $r = 0,1$) с опытом работы в школе и звеном школьного образования.

Диаграмма 2

Сравнительный анализ составляющих наглядного обучения (мнение учителей)

Пояснения к диаграмме:
АПД – средство активизации познавательной деятельности;
ЗБР – средство формирования зон ближайшего развития;
ФМЗ – средство формирования математических знаний;
МПО – средство моделирования процесса обучения.

Анализ данных, представленных на диаграмме 2, позволяет утверждать: у учителей нет четкого мнения о том, что такое наглядное обучение математике. Проверяя влияние на этот параметр основных внешних характеристик (педагогический стаж и звено школьного образования), мы получили, что они оказывают слабое влияние ($r_{pirson} = 0,1$; $r_{\text{чупров}} = 0,1$).

Сущность процесса усвоения понятий заключается в усвоении содержания понятия, его объема, существенных связей и отношений данного понятия с другими понятиями системы. Усвоение понятия предполагает также овладение умением оперировать им в решениях разнообразных задач познавательного и практического характера.

Для оценки качества усвоения понятия учащимися и эффективности применяемой методики его формирования А. В. Усова [230] выделяет следующие критерии:

а) полнота усвоения содержания понятия,

б) степень усвоения объема понятия, являющаяся мерой его обобщенности,

в) полнота усвоения связей и отношений данного понятия с другими,

г) умение отделять существенные признаки понятия от несущественных,

д) умение оперировать понятиями при решении задач,

е) умение классифицировать понятия, правильно их соотносить друг с другом.

В зависимости от того, в какой мере усвоение понятия удовлетворяет указанным критериям, определяются уровни его усвоения. Психологи Д. Н. Богоявленский, Н. А. Менчинская, М. Н. Шардаков различают четыре уровня. **Первый уровень** характеризуется диффузно-рассеянным представлением о предмете, явлении. Для **второго уровня** усвоения характерным является то, что ученик уже может указать признаки понятий, но не может отделить существенные от несущественных. Для **третьего уровня** усвоения понятий характерным является то, что ученик усваивает все существенные признаки, но понятие оказывается еще скованным единичными образами, служившими опорой при формировании понятия. Понятие еще не обобщено. **Четвертый уровень** характеризуется тем, что понятие уже обобщено, не сковано отдельными конкретными образами, служившими опорой при образовании понятия, усвоены существенные связи данного понятия с другими, благодаря чему ученик свободно оперирует понятием в решении различного рода задач.

Возникает необходимость в выделении еще более высокого – **пятого уровня** усвоения понятия (А. В. Усова), характеризующегося установлением связи понятий, формируемых при изучении какого-либо одного предмета, с понятиями, формируемыми в процессе изучения других предметов.

Мы исходили из предположения, что в процессе наглядного моделирования в обучении возникает возможность сформировать математические понятия вузовских курсов на четвертом – пятом уровнях.

4.3.1. Методика экспериментального исследования проблемы усвоения понятий

В целом специальный курс математического анализа читался студентам IV и V курсов дневного и заочного отделений (экспериментальные группы). При этом часть теорем и задач обобщающего характера студенты доказывали и решали самостоятельно, и результат этой работы оценивался на зачете.

Вводная часть (до введения понятия асимптотического представления функции) использовалась в лекционном курсе МПМ как один из вариантов постановки проблемы исследования функции на экстремум и необходимости введения понятия производной.

Уравнения касательных к кривым второго порядка с использованием указанного определения студенты выводили на практических занятиях по математическому анализу или вводному курсу математики (ВКМ). Если это делалось в ВКМ, то работа предварялась сообщениями об исторических кривых второго порядка.

Контрольная группа (школьники 11 класса) включала 103 человека. Коэффициент усвоения объема понятий (КУОП) колебался в пределах от 0 до 1.

В соответствии с формулой Брукса-Карузерса мы разбили полученные результаты на 10 классов (К).

$$K = [5\lg(103)] = [10,064] = 10.$$

Было проверено, какому закону подчиняется полученная совокупность изменения полноты усвоения объема понятий, определенного для i-го ученика по следующему соотношению:

$$x_i = \frac{(m_i - m_i')}{m}, \quad \text{где}$$

m_i – полнота усвоения объема i-м учащимся (доэкспериментальный срез);

m_i' – полнота усвоения объема i-м учащимся (послеэкспериментальный срез);

m – объем, подлежащий усвоению на конечном этапе формирования понятия.

Варианты генеральной совокупности показывают изменение среднеметрического качества усвоения понятий, выбранных для начал математического анализа.

В процессе проведения **констатирующего эксперимента** были получены 103 значения коэффициента усвоения объема понятия, составившие генеральную совокупность эксперимента. Поскольку число наблюдений велико, а признак варьируется широко, составим из элементов совокупности равномерный вариационный ряд.

Наименьшее значение: $x_{min} = 0,1$.

Наибольшее значение: $x_{max} = 1,00$.

Вычислим значение классового интервала:

$$i = \frac{x_{max} - x_{min}}{K} = 0,09.$$

Ранжировав выборку и закончив разноску вариантов, получим равномерный интервальный ряд, представленный в таблице 30 в первом и во втором столбцах.

Среднюю арифметическую вычислим, найдя сумму произведений среднего значения каждого класса на соответствующую частоту и поделив ее на 103. Получим $= 0,416$.

Модальный класс x_5 имеет частоту $= 16$. Влево от него расположено 54 варианты, а вправо – 33, что указывает на положительную асимметрию этого распределения.

Таблица 30

Вычислим значения показателя асимметрии (A_S) и показателя эксцесса (E_X).

$$A_S = \frac{\sum\limits_{i=1}^{K} p_i(x_i - \bar{x})^3}{nS_x^3} = 0,405, \quad E_X = \frac{\sum\limits_{i=1}^{K} p_i(x_i - \bar{x})^4}{nS_x^4} - 3 = -0,359.$$

Вычислим средние квадратические ошибки репрезентативности показателей асимметрии и эксцесса:

$t_{A_S} = \dfrac{|A_S|}{\sigma_{A_S}} = 1,686 < 3$. Распределение имеет существенную асимметрию.

$t_{E_X} = \dfrac{|E_X|}{\sigma_{E_X}} = -0,799 < 3$. Распределение имеет существенный эксцесс.

Поскольку ошибки репрезентативности меньше числа 3, нулевая гипотеза остается в силе. Следовательно, можно сделать вывод о том, что формирование понятийного аппарата элементов начал математического анализа в средней школе имеет случайный характер; этот вывод подтверждает большой процент (67,9%) учеников, коэффициент усвоения понятий которых менее половины от объема, предусмотренного образовательным стандартом.

Проведенный нами эксперимент показал, что знания студентов I курса педагогических вузов несущественно отличаются от знаний репрезентативной совокупности учащихся 11 классов, в дальнейшем мы исследовали только абсолютное изменение коэффициента усвоения объема понятий, производя замеры в контрольной и экспериментальной выборках. Поскольку первоначальное распределение имело значительную асимметрию, мы пользовались критерием Фишера для проверки нулевой гипотезы.

Для студентов экспериментальных групп специальности "математика и ее углубленное изучение" материал об исследовании функции на экстремум с помощью асимптотического представления излагался на лекциях по МПМ, на практических занятиях моделировалась деятельность учащихся по овладению знаниями об указанном методе и выработке умений в его применении. Контрольные группы с примерно равным средним баллом обученности по сравнению с экспериментальными группами обучались по традиционной методике.

Исследуя сформированность основных математических понятий, относящихся к курсу математического анализа, мы снимали следующие показатели: коэффициент усвоения понятийного аппарата (по методике Усовой) и приращение коэффициента усвоения понятийного аппарата.

Приступая к статистической обработке результатов, мы сформулировали два противоположных предположения, одно из которых должно было найти статистическое подтверждение.

Нулевая гипотеза: результаты, полученные в результате педагогического исследования, носят случайный характер.

Альтернативная гипотеза: разница между генеральными параметрами сравниваемых групп не равна нулю и различия, наблюдаемые между выборочными показателями, носят не случайный, а систематический характер.

Для выбранных тем составлялись циклы тестовых заданий, позволяющих проверить пять уровней усвоения (предъявления) понятий. Экспериментальная группа состояла из 262 человек, контрольная - из 233 (таблица 31). Количество классов приращения объема понятия мы взяли то же, что и в первом случае (10).

Таблица 31

Интервал	Экспериментальная	Контрольная
[0;0,1]	2	10
]0,1;0,2]	9	26
]0,2;0,3]	12	34
]0,3;0,4]	15	37
]0,4;0,5]	44	38
]0,5;0,6]	58	34
]0,6;0,7]	75	23
]0,7;0,8]	32	21
]0,8;0,9]	11	9
]0,9;1]	4	1
Сумма	262	233

Генеральная дисперсия составила: $S^2_Э = 630,62$, $S^2_K = 169,34$.

Параметр Фишера в форме Снедекора: $F = \dfrac{S^2_Э}{S^2_K} = 3,72$.

Так как в обеих совокупностях одинаковое число вариант, то число степеней одинаково и равно 9, $F_{st} = 3,2 < F$. Отсюда следует, что нулевую гипотезу следует отбросить и принять альтернативную. Целесообразно было бы полагать, что существенное различие исследуемого параметра обусловлено применением предлагаемой нами технологии наглядного моделирования в обучении математике.

Применение технологии наглядного моделирования в обучении математике в процессе обучения основным математическим понятиям, относящимся к курсу математического анализа, приводит к значительному росту коэффициента усвоения понятийного аппарата (по методике Усовой), что свидетельствует об эффективности технологии как структурообразующего фактора дидактической системы математического образования студентов педвузов.

4.3.2. Методика экспериментального исследования проблемы целостности математического знания

Рассматривая вопросы влияния технологии наглядного моделирования в обучении на процесс целостного усвоения математического знания, мы проверили целостность усвоения понятийного аппарата на примере темы “Элементарные функции”.

Экспериментальные данные позволяют построить модель усвоения целостного понятия класса элементарных функций, отвечающей требованиям профессиональной направленности, полноты, адекватно поставленным дидактическим целям, оптимальности используемого математического аппарата, взаимообусловленности внутренних взаимосвязей в единстве теоретической, практической и методической линий.

В качестве параметров, позволивших судить о целостном усвоении темы “Элементарные функции”, мы выбрали следующие характеристики целостного математического объекта: знание основных существенных компонентов темы; знание структуры внутренних взаимосвязей; понимание структуры внешних взаимосвязей; интегративность; функциональность; обобщенность.

Нами было обследовано 114 студентов в экспериментальной группе и 108 в контрольной. Совокупности состояли из студентов V курса физико-математического факультета педагогического университета (таблица 32).

Пояснения к диаграмме 3 и таблице 32: цифра после наименования параметра означает соответствующую кодировку по оси X на диаграмме; запись Э_1 следует понимать как данные экспериментальной группы, соответствующие первому уровню усвоения, следующие затем данные контрольной группы числом не маркировались, чтобы не нарушить зрительного восприятия диаграммы.

Таблица 32

		Экспериментальная					Контрольная группа				
Параметры целостности		Уровни предъявления					Уровни предъявления				
		Э_1	Э_2	Э_3	Э_4	Э_5	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
Знание ос-ных комп-тов	1	8	21	61	19	5	21	54	17	11	5
Знание структуры	2	4	13	38	52	7	28	31	28	13	8
Понимание структуры	3	9	26	62	14	3	29	29	26	21	3
Интегративность (4)	4	8	27	59	17	3	19	41	27	19	2
Функциональность (4)	5	4	17	40	48	5	24	34	30	17	3
Обобщенность (5)	6	6	26	60	18	4	15	42	32	18	1

Данные следующей таблицы позволяют вычислить средний уровень показателя целостности усвоения темы “Элементарные функции”.

Таблица 33

Параметры целостности	Средний Э	Средний К
Знание основных существенных компонентов темы	3,09	2,31
Знание структуры внутренних взаимосвязей	3,58	2,46
Понимание структуры внешних взаимосвязей	2,94	2,44
Интегративность	2,98	2,48
Функциональность	3,47	2,45
Обобщенность	3,06	2,52

Дисперсия совокупности в столбцах таблицы 33 составила: $S_{Э}^2 = 0,06$, $S_K^2 = 0,004$.

Параметр Фишера в форме Снедекора: $F = \dfrac{S_{Э}^2}{S_K^2} = 14,36$.

Диаграмма 3

Так как в обеих совокупностях одинаковое число вариантов, то число степеней одинаково и равно 5, $F_{st} = 4,28 < F$. Отсюда следует, что нулевую гипотезу следует отбросить и принять альтернативную. Данный статистический показатель позволяет утверждать, что наиболее близко к теоретически целому знанию по теме “Элементарные функции” подошли студенты выпускного курса, обучавшиеся в экспериментальных группах.

Таким образом, использование технологии наглядного моделирования в обучении математике способствует целостности усвоения темы (раздела) математики, отвечающей требованиям профессиональной направленности, полноты, оптимальности используемых математических средств, взаимообусловленности в единстве теоретической, практической и методической линий.

Заключение

В ходе теоретического и экспериментального исследования поставленной научной проблемы в соответствии с задачами и целями исследования, методологией системного подхода получены следующие основные результаты:

– разработана модель дидактической системы математического образования студентов педвузов в единстве методологического, теоретического, практического и общекультурного компонентов;

– выявлены условия реализации и развития дидактической системы математического образования учителя математики: педагогические, психологические, технологические, мотивационные;

– разработаны основополагающие (теоретические и методические) принципы и критерии отбора содержания, методов и средств математической подготовки студентов педвузов в контексте личностно-ориентированной педагогики;

– разработана технология наглядного моделирования в обучении математике в педвузе как фактор оптимизации целостного педагогического процесса математической подготовки учителя математики, выявлены сущность, компоненты, функции и виды наглядности в обучении математике;

– разработан механизм осуществления внутреннего и внешнего мониторинга функционирования системы математического образования студентов педвузов с целью придания ей свойства саморегуляции;

– проведен педагогический эксперимент с целью выяснения оптимальности функционирования системы математического образования будущего учителя математики. Обоснована методами статистического анализа эффективность предлагаемой системы.

Библиографический список

1. *Ананьев Б.Г., Дворяшина М.Д., Кудрявцева Н.А.* Индивидуальное развитие человека и константность восприятия. М.: Просвещение, 1968. 335 с.
2. *Ананьев Б.Г.* О проблемах современного человекознания. М.: Наука, 1977. 380 с.
3. *Анохин П.К.* Философский смысл проблемы интеллекта / Вопросы философии. 1973. № 3. С. 83–97.
4. *Анохин П.К.* Очерки по физиологии функциональных систем. М.: Медицина, 1975. 448 с.
5. *Антоновский Ш.* Простота восприятия – важнейшая часть понятия наглядности // МШ. 1971. № 4. С. 64–68.
6. *Арнхейм Р.* Визуальное мышление / Хрестоматия по общей психологии. Психология мышления. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. С. 97–108.
7. *Архангельский С.И.* Учебный процесс в высшей школе, его закономерные основы и методы. М.: Высшая школа, 1980. 368 с.
8. *Аткинсон Р., Бауэр Г., Кротерс Э.* Введение в математическую теорию обучения. М.: Мир, 1969. 486 с.
9. *Аткинсон Р.* Человеческая память и процесс обучения. М.: Прогресс, 1980. 527 с.
10. *Афанасьев В.Г.* О целостных системах // Вопросы философии. 1980. № 6. С. 62–78.
11. *Афанасьев В.Г.* Проблема целостности в философии и биологии. М.: Мысль, 1964. 174 с.
12. *Афанасьев В.В.* Формирование творческой активности студентов в процессе решения математических задач. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 1996. 168 с.
13. *Бабанский Ю.К.* Рациональная организация учебной деятельности. М.: Знание, 1981. 283 с.
14. *Бажокин С.В., Паршин Д.А.* Фракталы и мультифракталы. Ижевск: НИЦ РХД, 2001. 128 с.
15. *Балашов Ю.К., Рыжов В.А.* Профессиональная подготовка кадров в условиях капитализма. М.: Высшая школа, 1987. 192 с.
16. *Балантер Б.И., Ханин М.А., Чернавский Д.С.* Введение в математическое моделирование патологических процессов. М.: Медицина, 1980. 262 с.

17. *Баранцев Р. Г.* Универсальная семантика триадических структур в науке-искусстве-религии // Языки науки – языки искусства. М.: Прогресс-Традиция. 2000. С. 61-65
18. *Башмаков М.И., Резник Н.А.* Развитие визуального мышления на уроках математики // МШ. 1991. № 1. С. 4–8.
19. *Бежева Т.Б.* Обобщенные наглядные ориентиры в управлении познавательной деятельностью. Дис. ... канд. пед. наук / Владикавказ, 1992. 186 с.
20. *Березин В.Н.* Функции наглядности в изучении геометрии // Новые исследования в пед. науках. 1976. № 1. С. 6–9.
21. *Бескин Н.М.* О задачах методики математики // МШ. 1989. № 5. С. 35-38.
22. *Беспалько В.П.* Педагогика и прогрессивные технологии обучения. М., 1995. 336 с.
23. *Беспалько В.П.* Слагаемые педагогической технологии. М.: Педагогика, 1989. 190 с.
24. *Бетелева Т.Г.* Нейрофизиологические механизмы зрительного восприятия. М., 1983. 175 с.
25. *Блауберг И.В., Юдин Б.Г.* Понятие целостности и его роль в научном познании. М.: Знание, 1972. 270 с.
26. *Богоявленский Д.Н., Менчинская Н.А.* Психология усвоения знаний. М.: АПН РСФСР, 1959.
27. *Богоявленский Д.Н.* Психология усвоения знаний в школе. М.: Просвещение, 1959. 347 с.
28. *Богомолов В.И.* Педагогическая технология: эволюция понятия // Сов. педагогика. 1991. № 9. С. 123–128.
29. *Болтянский В.Г.* Формула наглядности: изоморфизм + простота // Советская педагогика. 1970. № 5. С. 46–60.
30. *Болтянский В.Г.* Кабинет математики. М.: Педагогика, 1972. 163 с.
31. *Болтянский В.Г., Глейзер Г.Д.* К проблеме дифференциации школьного математического образования // МШ. 1988. 3. С. 9–13.
32. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 384 с.
33. *Бочкина Н.В.* Сущность педагогических технологий // Педагогические системы в школе и вузе: технологии и управление: Тез. докл. Рос. науч. конф. Волгоград, 1993.
34. *Брунер Дж.* Психология познания. М.: Прогресс, 1977. 412 с.
35. *Брунер Дж.* Процесс обучения. М: АПН РСФСР, 1962. 84 с.

36. *Брушлинский А.В.* Психология мышления и кибернетика. М.: Мысль, 1970. 191 с.
37. *Буняев М.М.* Проектирование разветвленно-диалоговых обучающих систем. М., 1991. 134 с.
38. *Вахтеров В.П.* Избранные педагогические сочинения. М.: Педагогика, 1987. 400 с.
39. *Вегнер Л.А.* Восприятие и обучение. М.: Просвещение, 1969. 364 с.
40. *Величковский В.М.* Современная когнитивная психология. М.: Изд-во МГУ, 1982. 336 с.
41. *Вербицкий А.А.* Активное обучение в высшей школе: контекстный подход. М.: Высшая школа, 1991. 207 с.
42. *Виленкин Н.Я.* Современные проблемы школьного курса математики и их исторические аспекты // МШ. 1988. № 4. С. 34–38.
43. *Владимиров В.С.* Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964. 412 с.
44. *Волович М.Б.* Средство наглядности как материальная основа управления процессом усвоения знаний в школе // Сов. педагогика. 1979. № 9. С. 45–48.
45. Восприятие и действие / Под ред. Запорожца А.В. М.: Просвещение, 1967. 323 с.
46. *Встовский Г.В.* Элементы информационной физики. М.: МГИУ, 2002. 260 с.
47. *Выготский Л.С.* Избранные психологические исследования. М.: АПН РСФСР, 1956. 519 с.
48. *Выготский Л.С.* Развитие высших психических функций. М.: Изд-во АПН РСФСР, 1960. 500 с.
49. *Галеев И.Х.* Решение дидактической задачи в АОС // Теоретические и прикладные задачи оптимизации. М.: Наука, 1985. С. 80–86.
50. *Гальперин П.Я.* Развитие исследований по формированию умственных действий // Психологическая наука в СССР. Т. 1. М., 1969.
51. *Гальперин П.Я.* Типы ориентировки и типы формирования действий и понятий // Доклады АПН РСФСР. 1958. № 2. С. 75–79.
52. *Ганзен В.А.* Восприятие целостных объектов. Л.: Изд-во Лен. ун-та, 1973. 153 с.
53. *Гареев В.М. и др.* Принципы модульного обучения // Вестник высшей школы. 1987. № 8. С. 27–33.
54. *Гнеденко Б.В.* О роли математики в формировании у учащихся научного мировоззрения // МШ. 1989. № 5. С. 19–26.

55. *Гриффитс Ф., Харрис Дж.* Принципы алгебраической геометрии. Т. 1, 2. М.: Мир, 1982. 862 с.
56. *Гусев В.А.* Как помочь ученику полюбить математику? М.: Авангард, 1994. 168 с.
57. *Давыдов В.В.* Виды обобщений в обучении. М.: Педагогика, 1972. 423 с.
58. *Давыдов В.В.* Проблемы развивающего обучения. М.: Педагогика, 1986. 240 с.
59. *Давыдов В.В.* Психологическая теория учебной деятельности и методов начального обучения, основанных на содержательном обобщении. Томск: Пеленг, 1992. 283 с.
60. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Т. 1. М., 1962. 720 с.
61. *Дональдсон М.* Мыслительная деятельность детей. М.: Педагогика, 1985. 191 с.
62. *Дьяченко В.К.* Организационная структура учебного процесса и ее развитие. М.: Педагогика, 1989. 160 с.
63. *Евдокимов В.И.* Использование средств наглядного обучения в условиях проблемно-поисковой деятельности учащихся: Автореф. дис. ... канд. пед. наук / Киев, 1973.
64. *Жохова Е.Ю.* Компьютерная технология решения геометрических задач как средство формирования понятийного аппарата // Дис. ... канд. пед. наук / 1995. 160 с.
65. *Забрейко П.П.* Идеальные пространства функций, 1 // Вестник Ярославского университета. Ярославль, 1974. с. 8–52.
66. *Забродин Ю.М.* Процессы принятия решения на сенсорно-перцептивном уровне //Проблемы принятия решения. М.: Наука, 1976. С. 33-55.
67. *Загвязинский В.И.* Педагогическое творчество учителя. М.: Просвещение, 1987. 156 с.
68. *Занков Л.В.* Наглядность и активизация учащихся в обучении. М.: Учпедгиз, 1960. 311 с.
69. *Зенкин А.А.* Когнитивная компьютерная графика. М.: Наука, 1991. 187 с.
70. *Зинченко В.П.* Образ и деятельность. М.: Изд-во “Институт педагогической психологии”, Воронеж: НПО “МОДЭК”, 1997. 608 с.
71. *Зинченко П.И.* Непроизвольное запоминание. М.: Изд-во АПН РСФСР, 1961. 562 с.

72. *Зинченко В.П., Величковский Б.М., Вучетич Г.Г.* Функциональная структура зрительной памяти. М.: Изд-во МГУ, 1980. 271 с.
73. *Зинченко В.П., Гордон В.М.* Методологические проблемы психологического анализа деятельности // Системные исследования. М., 1976. С. 82–127.
74. *Ильин В.С.* Формирование личности школьника (целостный процесс). М.: Педагогика, 1984. 144 с.
75. *Иосида К.* Функциональный анализ. Пер. с англ. М.: Мир, 1967. 624 с.
76. История Московского университета / Отв. ред. М. Н. Тихомиров. Т. 1. М.: МГУ, 1955. 561 с.
77. *Ительсон Л.Б.* Математические и кибернетические методы в педагогике. М.: Просвещение, 1964. 248 с.
78. *Кабанова-Меллер Е.Н.* Формирование приемов умственной деятельности и умственное развитие учащихся. М.: Просвещение, 1968. 288 с.
79. *Кабанова-Меллер Е.Н.* Роль образа в решении задач // Вопр. психологии. 1970. № 5. С. 122-130.
80. *Каган М.С.* Человеческая деятельность (Опыт системного анализа). М.: Политиздат, 1974. 327 с.
81. *Калмыкова З.И.* Продуктивное мышление как основа обучаемости. М.: Педагогика, 1981. 200 с.
82. *Кан-Калик В.А., Никандров Н.Д.* Педагогическое творчество. М.: Педагогика, 1990. 144 с.
83. *Кантор И.М.* Понятийно-терминологическая система педагогики. М.: Педагогика, 1980. 158 с.
84. *Каплан Б.С., Рузин Н.К., Столяр А.А.* Методы обучения математике. Минск: Народная Асвета, 1981. 191 с.
85. *Каптерев П.Ф.* Избранные педагогические сочинения / Под ред. А.М.Арсеньева. М.: Педагогика, 1982. 704 с.
86. *Карпов А.В.* Психология принятия управленческих решений. М.: Изд-во “Юристъ”, 1998. 435 с.
87. *Карпов В.В., Белкин Е.Л., Харнаш П.И.* Психолого-педагогические основы исследования технических средств в учебном процессе. Ярославль, 1983. 116 с.
88. *Карпова Т.Н.* Наглядное обучение математике как эффективный процесс формирования математических знаний школьников. Дис. ... канд. пед. наук / Ярославль, 1995. 158 с.
89. *Кларин М.В.* Педагогическая технология в учебном процессе: Анализ зарубежного опыта. М.: Знание, 1989.

90. *Кларин М.В.* Инновационные модели обучения в зарубежных педагогических поисках, М.: “Арена”, 1994. 222 с.
91. *Кларин М.В.* Развитие педагогической технологии и проблемы теории обучения // Сов. педагогика. 1984. № 4. С. 117–122.
92. *Колягин Ю.М.* Размышления о некоторых педагогических и методических проблемах школы /МШ. 1989. № 5. С. 17–22.
93. *Коменский Я.А.* Великая дидактика // Избранные педагогические сочинения в двух томах. М., 1982. Т. 1.
94. *Коршунов А.М., Мантатов В.В.* Теория отражения и эвристическая роль знаков. М., 1974. 215 с.
95. Краткий философский словарь / Под ред. М. Розенталя и П. Юдина. М.: Госиздполитлит, 1954. 703 с.
96. *Копытов Н.А.* Методика построения системы упражнений, ориентированной на формирование геометрических понятий / Дис. ... канд. пед. наук / М., 1997. 129 с.
97. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000. 252 с.
98. *Крутецкий В.А.* Психология математических способностей школьников. М.: Просвещение, 1968. 431 с.
99. *Кузнецова В.А.* Теория и практика многоуровневого университетского педагогического образования. Ярославль, 1995. 268 с.
100. *Кузнецова Н.Л., Осташков В.Н.* Фракталы на детерминантных многообразиях // Тезисы докладов Второго Международного междисциплинарного симпозиума “Фракталы и прикладная синергетика”. М.: Изд-во МГОУ, 2001. С. 33–34.
101. *Лакин Г.Ф.* Биометрия. М.: Высшая школа. 1980. 293 с.
102. *Ланге Н.Н.* Психология // Итоги науки в теории и практике. Т. 8. М., 1914. 312 с.
103. *Леднев В.С.* Содержание образования. М.: Высшая школа, 1989. 360 с.
104. *Леонтьев А.Н.* Деятельность, сознание, личность. М.: ИПЛ, 1975. 304 с.
105. *Лернер И.Я.* Дидактические основы методов обучения. М.: Просвещение, 1981. 165 с.
106. *Лернер И.Я.* Учебные умения и их функции в процессе обучения. М.: Педагогика, 1984. С. 19–33.
107. *Лифшиц Е.А.* Идеально выруклые множества // Функц. анализ и его приложения. 1970. Т. 4. № 4. С. 76–77.

108. *Липкина А.И.* Самооценка школьника и его память // Вопр. психологии. № 3, 1981. С. 79–88.
109. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. Череповец: Меркурий-ПРЕСС, 2000. 528 с.
110. *Ломов Б.Ф.* Вопросы общей, педагогической и инженерной психологии. М.: Педагогика, 1991. 296 с.
111. *Ломов Б.Ф.* Методологические и теоретические проблемы психологии. М.: Наука, 1980. 280 с.
112. *Лошкарева Н.А.* Формирование системы общих учебных умений и навыков школьников. М.: МГПИ, 1982. С. 24–32.
113. *Луканкин Г.Л.* Научно-методические основы профессиональной подготовки учителя математики в педагогическом институте: Автореф. дис. ... д-ра пед. наук / Л., 1989. 59 с.
114. *Максимов Л.К.* Учебное моделирование и формирование математического мышления младших школьников // Новые исследования в психологии. М.: Педагогика. 1987. № 1. С. 23–30.
115. *Мандельброт Б.* Самоаффинные фрактальные множества // Фракталы в физике. Труды VI международного симпозиума по фракталам в физике. М.: Мир, 1988. С. 9–47.
116. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
117. *Марев И.* Методологические основы дидактики. М.: Педагогика, 1987. 224 с.
118. *Маркушевич А.И.* Преподавание в школе естественно-математических наук и формирование научного мировоззрения / МШ. 1976. № 2. С. 10–16.
119. *Маритан А., Стелла А.* Статистическая механика самонепересекающихся случайных поверхностей // Фракталы в физике. Труды VI международного симпозиума по фракталам в физике. М.: Мир, 1988. С. 151–155.
120. *Матюшкин А.М.* Проблемные ситуации в мышлении и обучении. М.: Педагогика, 1972. 208 с.
121. *Махлак Б.С., Рапопорт И.А.* Соотношение памяти и волевых качеств личности // Вопр. психологии. № 5. 1980. С. 105–118.
122. *Махмутов М.И.* Проблемное обучение. М., 1975. 367 с.
123. *Менчинская Н.А.* Проблемы учения и умственного развития школьника. М.: Педагогика, 1989. 224 с.

124. *Метельский Н.В.* Дидактика математики: общая методика и ее проблемы (учебное пособие для вузов). 2-е изд. перераб. Минск: Изд-во БГУ, 1982. 256 с.
125. *Метельский Н.В.* Психолого-педагогические основы дидактики математики. Минск: Высшая школа, 1977. 160 с.
126. *Метельский Н.В.* Очерки истории методики математики. К вопросу о реформе преподавания математики. Минск: Вышэйшая школа, 1968. 340 с.
127. *Мингазов Э.Г.* Гносеологические основы принципа наглядности в обучении // Сов. педагогика. 1975. № 9. С. 13–18.
128. *Мингазов Э.Г.* О двух формах наглядности в школьной практике // Новые исследования в пед. науках. АПН СССР. 1986. № 1(53). С. 28–44.
129. *Минский М.* Общение с внеземным разумом // Реальность и прогнозы искусственного интеллекта. М., 1986. С. 231.
130. *Минский М.* Фреймы для представления знаний (пер. с англ.). М.: Энергия, 1979. 151 с.
131. *Митчелл Э.* Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. М.: Мир, 1981. 216 с.
132. *Митькин А.Л.* Законы "гештальта" и фазность восприятия // Психологический журнал. Т. 4. 1983. № 6. С. 30–38.
133. *Монахов В.М.* Технологические основы проектирования и конструирования учебного процесса. Волгоград: Перемена, 1995. 152 с.
134. *Мордкович А.Г.* Профессионально-педагогическая направленность специальной подготовки учителя математики в педагогическом институте. Дис. ... д-ра пед. наук / М., 1986.
135. *Мордкович А.Г.* О профессионально-педагогической направленности математической подготовки будущих учителей / МШ. 1984. № 6. С. 42–44.
136. *Мурина И.Н., Соловьев А.Ф.* О наглядности преемственности основных понятий математического анализа в школе // Непрерывное педагогическое образование. Ярославль, 1995. С. 86–94.
137. *Мурина И.Н.* Наглядное обучение как фактор усвоения математических понятий студентами педагогических вузов (на базе элементарных функций) // Дис. ... канд. пед. наук / Ярославль, 1996. 142 с.
138. *Нигматуллин Р.Р.* Дробный интеграл и его физическая интерпретация // ТМФ № 3. Т. 90. 1992. С. 354–367.
139. *Низамов Р.А.* Дидактические основы активизации учебной деятельности студентов. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1975. 302 с.

140. *Никандров Н.Д.* Современная высшая школа капиталистических стран. М.: Высшая школа, 1978. 279 с.
141. *Никитин Е.П.* Объяснение – функция науки. М., 1970. 212 с.
142. *Новик И.Б.* Наглядность и модели в теории элементарных частиц // Философские проблемы физики элементарных частиц. М.: Изд-во АН СССР, 1963. С. 302–337.
143. *Новиков С. П.* Уроки истории. Вопросы истории естествознания и техники. 1997. № 1.
144. *Нуридинов Л.Н.* О сущности понятия "наглядность" при проблемном обучении // Новые исследования в пед. науках. АПН СССР. 1976. № 2.
145. *Оганесян В.А.* Принципы отбора основного содержания обучения математике в средней школе. Ереван: Луйс, 1984. 243 с.
146. *Осташков В.Н.* Классификация квадратичных преобразований плоскости // Конструктивная алгебраическая геометрия. Ярославль: Изд-во ЯГПИ, 1981. Вып. 194. С. 99–105.
147. *Осташков В.Н.* Проективное свойство центроида точек // Вестник Тюменского государственного университета. Тюмень: ТГУ, 1998. С. 15–17.
148. *Осташков В.Н.* Центроид и звезды // Математический сборник. Научное издание. Ишим: ИГПИ им. П. П. Ершова, 2000. С. 60–64.
149. *Осташков В.Н., Коротаева В.А.* Аттракторы бирациональных преобразований // Синергетика. Труды семинара. Естественнонаучные, социальные и гуманитарные аспекты. Т. 6. М.: МГУ, 2003. С. 23–37.
150. *Осташков В.Н., Смовж А.И.* Самоподобные множества // Фракталы и их приложения в науке и технике. Труды Всероссийской научной конференции. Тюмень: Изд-во ТюмГНГУ, 2003. С. 38–51.
151. Педагогический словарь. М., 1960.
152. *Песталоцци И.Г.* Метод. Избранные педагогические сочинения. М., 1981.
153. *Пиаже Ж.* Избранные психологические труды. М.: Международная пед. академия, 1994. 680 с.
154. *Пидкасистый П.И.* Самостоятельная деятельность учащихся. М.: Педагогика, 1972. 184 с.
155. *Платонов К.К., Голубев Г.Г.* Психология. М.: Высшая школа, 1973. 273 с.
156. Подготовка учителя математики: инновационные подходы: Учеб. пособие / Под ред. В.Д. Шадрикова. М.: Гардарики, 2002. 383 с.

157. Познавательные процессы и способности в обучении / Под ред. В.Д.Шадрикова. М.: Просвещение, 1990. 142 с.
158. Познавательные процессы: ощущения, восприятие. / Под ред. Б.Г. Ананьева. М.: Педагогика, 1982. 336 с.
159. *Пойа Д.* Математическое открытие. М.: Наука, 1970. 452 с.
160. *Полищук Д. Ф.* Техническое творчество в механике. Системно-операторная механика. Ижевск: Изд-во Удм. университета, 1993. 230 с.
161. *Полонский В.М.* Оценка качества научно-педагогических исследований. М.: Педагогика, 1987. 144 с.
162. *Полякова Т.С.* История отечественного школьного математического образования. Два века (XVIII), РПУ, 1997. 287 с.
163. *Пономарев Я.А.* Психология творчества. М.: Наука, 1976. 303 с.
164. *Поспелов Д.А.* Логико-лингвистические модели в системах управления. М., 1981.
165. *Поспелов Г.С., Поспелов Д.А.* Искусственный интеллект – прикладные системы. М.: Знание, 1985. 48 с.
166. Представление и использование знаний (пер. с японского) / Под ред. Х.Уэно. М.: Мир, 1989. 220 с.
167. Приобретение знаний (пер. с японского) / Под ред. С.Осуги, Ю.Саэки. М.: Мир, 1990. 304 с.
168. *Робертсон А., Робертсон В.* Топологические векторные пространства: Пер. с англ. М.: Мир, 1967. 257 с.
169. *Рожков М.И.* Теоретические основы педагогики. Ярославль, ЯГПУ, 1994. 63 с.
170. *Рубинштейн Р.Б.* Графики функций. М.: Высшая школа, 1991. 160 с.
171. *Рубинштейн С.Л.* О мышлении и путях его исследования. М.: Изд-во АН СССР, 1958. 147 с.
172. *Рубинштейн С.Л.* Проблемы общей психологии. М.: Педагогика, 1973. 416 с.
173. *Савенков А.И.* Психологические основы исследовательского подхода к обучению: Учебное пособие. М.: “Ось–89”, 2006. 480 с.
174. *Салмина Н.С.* Знак и символ в обучении. М.: Изд-во МГУ, 1988. 288 с.
175. *Салмина Н.С.* Виды и функции материализации в обучении. М.: Изд-во МГУ, 1981. 134 с.
176. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

177. *Сериков В.В.* Личностный подход в образовании: концепция и технологии. Волгоград: Перемена, 1994. 175 с.
178. *Славин А.В.* Наглядный образ в структуре познания. М.: Политиздат, 1971. 271 с.
179. *Смирнов А.А.* Проблемы психологии памяти. М.: Просвещение, 1966. 423 с.
180. *Смирнов Е.И. и др.* Учебно-методическое руководство для самостоятельной работы студентов по теме "Введение в анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одного действительного переменного". Ярославль: ЯГПИ, 1987. 197 с.
181. *Смирнов Е.И.* Роль сквозных тем в процессе преподавания математического анализа // Профессионально-педагогическая направленность математической подготовки учителя в педагогическом институте. М.: МГЗПИ, 1989. С. 38–45.
182. *Смирнов Е.И., Поваренков Ю.П.* Совершенствование предметной подготовки учителя математики // Педагогическое образование в современных условиях. Ярославль, 1997. С. 121–123.
183. *Смирнов Е.И., Афанасьев В.В.* Введение // Непрерывное педагогическое образование. Вып. VIII, РГПУ; УМО ОППО; ЯГПУ. Ярославль, 1995. С. 3–6.
184. *Смирнов Е.И., Ястребов А.В.* Введение в анализ. Часть I "Действительные числа". Ярославль: ЯГПИ, 1983. 36 с.
185. *Смирнов Е.И., Ястребов А.В.* Введение в анализ. Часть II "Функции". Ярославль: ЯГПИ, 1984. 33 с.
186. *Смирнов Е.И., Ястребов А.В.* Введение в анализ. Часть III "Последовательность. Предел последовательности" Ярославль: ЯГПИ, 1987. 33с.
187. *Смирнов Е.И., Ястребов А.В.* Введение в анализ. Часть IV "Подпоследовательность. Метод Больцано" Ярославль: ЯГПИ, 1989. 35с.
188. *Смирнов Е.И., Соловьев А.Ф.* Государственный экзамен по математике (методика микродипломов) Ярославль: ЯГПИ, 1989. 17с.
189. *Смирнов Е.И., Репин И.И.* Государственный экзамен по математике (заочное отделение) Ярославль: ЯГПИ, 1990. 10 с.
190. *Смирнов Е.И.* Дескриптивные методы и теорема о замкнутом графике // Тезисы Международного конгресса "Анализ и логика", Монс, Бельгия, 1997.
191. *Смирнов Е.И., Асекритова И.У.* Дидактические материалы для контроля знаний студентов по математическому анализу Ярославль: ЯГПИ, 1992. 35 с.

192. *Смирнов Е.И., Аввакумов Э.* Дидактические материалы по теме “Предел последовательности” (программный продукт) Ярославль: ЯГПУ, 1997. 31 с.
193. *Смирнов Е.И., Афанасьев В.В.* Математическое образование физика: принципы, содержание и стратегия // Вестник РУДН, серия ФЕНО. Т. 3(1–2). 1997. С. 47–72.
194. *Смирнов Е.И., Афанасьев В.В.* Математическое образование физика: принципы, содержание и стратегия // Тезисы IV Международной конференции “Физика в системе современного образования”. Волгоград, 1997.
195. *Смирнов Е.И.* Машинный контроль умений по математическому анализу на микроЭВМ. ОМСК: Центр НИТО, 1989. 12 с.
196. *Смирнов Е.И., Карпова Т.Н.* Наглядное обучение математике в педвузе – сочетание научности и доступности – психология, интуиция, опыт // Непрерывное педагогическое образование. Вып. VIII, РГПУ; УМО ОППО; ЯГПУ. Ярославль, 1995. 26 с.
197. *Смирнов Е.И.* Наглядно-модельное обучение математике в педвузе // Тезисы II Международной конференции “Стандарты в образовании: проблемы и перспективы”. М, 1997.
198. *Смирнов Е.И.* О непрерывности полуаддитивных функционалов / Math. Notes. 1976. T. 19. № 4. P. 541–548.
199. *Смирнов Е.И.* Предел Суслина топологических линейных пространств и его приложения: Дисс... канд. физ.-мат. наук / Ленингр. гос. ун-т. Л., 1979. 104 с.
200. *Смирнов Е.И., Забрейко П.П.* О принципах равномерной ограниченности / Math. Notes, 1984. T. 35. № 4. P. 287–297.
201. *Смирнов Е.И., Поваренков Ю.П., Шадриков В.Д.* Определение содержания математической подготовки учителя математики в педагогическом вузе. Ярославль, 1997. 432 с.
202. *Смирнов Е.И.* Роль сквозных тем в преподавании математического анализа в педвузе. М.: МГЗПИ, 1989. С. 35–43.
203. *Смирнов Е.И., Скопец З.А.* Сборник олимпиадных задач по математике для школьников. Ярославль, 1979. 75 с.
204. *Смирнов Е.И.* Теорема о замкнутом графике / Сибирский матем. журнал. 1977. Т. 18. № 2. С. 305–316.
205. *Смирнов Е.И.* Технология наглядно-модельного обучения математике. Ярославль, 1998. 335 с.

206. *Смирнов Е.И., Соловьев А.Ф., Ястребов А.В.* Учебно-методическое руководство для организации самостоятельной работы студентов по математическому анализу Ярославль: ЯГПИ, 1988. 168 с.
207. *Смирнов Е.И., Соловьев А.Ф.* Учебная программа по математическому анализу // Сборник альтернативных учебных программ математических и методических курсов для педагогических институтов (часть I) Под ред. А.Г.Мордковича. Москва, 1992.
208. *Смирнов Е.И.* Хаусдорфовы спектры в функциональном анализе. М.: МГПИ, 1991. 120 с.
209. *Смирнов Е.И.* Хаусдорфовы спектры в функциональном анализе. М.: 1994. 161 с.
210. *Смирнов Е.И., Афанасьев В.В.* Экспериментальное исследование творческой активности студентов в процессе обучения математике // Ярославский педагогический вестник. № 3(6). 1996. С. 110–115.
211. *Смирнова И.М.* Научно-методические основы преподавания геометрии в условиях профильной дифференциации обучения: Автореф. дис. ... д-ра пед. наук / М., 1995. 38 с.
212. *Соболев С.Л.* Судить по конечному результату / МШ. 1984. № 1. С. 15–19.
213. Советский энциклопедический словарь. М.: Советская энциклопедия, 1989. 617 с.
214. *Сохор А.М.* Логическая структура учебного материала. М., 1974. 192 с.
215. *Сохор А.М.* Объяснение в процессе обучения: элементы дидактической концепции. М.: Педагогика, 1988. 125 с.
216. *Спирин Л.Ф.* Теория и технология решения педагогических задач. М.: Изд-во “Российское педагогическое агентство”, 1997. 174 с.
217. *Стефанова Н.Л.* Теоретические основы развития системы методической подготовки учителя математики в педагогическом вузе // Дис. ... д-ра пед. наук / С.-Перетбург, 1996.
218. *Стечкин С.Б.* Об ограниченности нелинейных функционалов // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17. № 1. С. 215–222.
219. *Столяр А.А.* Педагогика математики, Минск: Вышэйшая школа, 1986. 414 с.
220. *Суворова С.Б.* Система упражнений как средство организации учебной деятельности: Дис. ... канд. пед. наук / 1982. 24 с.
221. *Талызина Н.Ф.* Педагогическая психология. М., 1998. 288 с.
222. *Талызина Н.Ф.* Управление процессом усвоения знаний. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 344 с.

223. Теоретические основы содержания общего среднего образования / Под ред. В. В. Краевского, И. Я. Лернера. М.: Педагогика, 1983. 206 с.
224. *Теплов Б.М.* Проблемы индивидуальных различий. М.: Изд-во АПН РСФСР, 1961. 536 с.
225. Труды Всероссийских съездов преподавателей математики. М, 1912.
226. *Турчин А.С.* Моделирование как условие формирования творческого мышления // Дис. ... канд. психол. наук / М., 1986.
227. *Узнадзе Д.Н.* Экспериментальные основы психологии установки. Тбилиси, 1961. 210 с.
228. *Усандро А.И.* Динамические модели как средство активизации познавательной деятельности учащихся // Дис. ... канд. пед. наук / Минск, 1992.
229. *Усова А.В.* Психолого-дидактические основы формирования у учащихся научных понятий. Челябинск, ЧГПИ, 1978. 99 с.
230. *Усова А.В.* Формирование у школьников научных понятий в процессе обучения. М.: Педагогика, 1984. С. 50–105.
231. *Ушаков Д.Н.* Толковый словарь. В 4 т. М.: Русский язык, 1947.
232. *Ушинский К.Д.* Собрание сочинений. М.: АПН РСФСР, 1949.
233. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991. 256 с.
234. *Фор А.* Восприятие и распознавание образцов. М.: Машиностроение, 1989. 271 с.
235. *Фребель Ф.* Педагогические сочинения. М.: Тихомиров, Т. 1–2. 1913.
236. *Фрелихер А., Бухер В.* Дифференциальное исчисление в векторных пространствах без нормы: Пер. с нем. М.: Мир, 1970. 168 с.
237. *Фридман Л.М.* Психолого-педагогические основы обучения математике в школе. М.: Просвещение, 1983. 160 с.
238. *Фридман Л.М.* Наглядность и моделирование в обучении. Знание, 1984. 79 с.
239. *Фридман Л.М.* Моделирование в психологии и психология моделирования // Вопр. психологии. 1977. № 2. С. 15–27.
240. *Халмош П.* Теория меры: Пер. с нем. М.: Мир, 1953. 292 с.
241. *Хамблин Д.* Формирование учебных навыков. М.: Педагогика, 1986. 160 с.
242. *Хинчин А.Я.* Педагогические статьи. М., 1963. 204 с.
243. *Цетлин В.С.* Неуспеваемость школьников и ее предупреждение. М.: Педагогика, 1977. 120 с.
244. *Чепиков М.Г.* Интеграция науки. М., 1981.

245. *Чернавский Д.С.* Информация, самоорганизация, мышление // Синергетика. Труды семинара. Материалы круглого стола “Самоорганизация и синергетика: идеи, подходы и перспективы”. М.: МГУ, 2000. Т. 3. С. 143–182.
246. *Чошанов М.А.* Гибкая технология проблемно-модульного обучения. М.: Народное образование, 1996. 160 с.
247. *Чошанов М.А.* Диагностические умения учащихся // Сов. педагогика. 1990. № 3. С. 40–44.
248. *Шадриков В.Д.* Психология деятельности и способности человека: Учебное пособие. М.: Логос, 1996. 320 с.
249. *Шамова Т.И.* Активизация умения школьников. М.: Знание, 1979. 96 с.
250. *Шардаков М.Н.* Мышление школьника. М.: Учпедгиз, 1963. 225 с.
251. *Шатихин Л.Г.* Структурные матрицы и их применение для исследования систем. М.: Машиностроение, 1991. 256 с.
252. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства: Пр. с нем. М.: Мир, 1971. 359 с.
253. *Шехтер М.С.* Психологические проблемы узнавания. М.: Просвещение, 1967. 220 с.
254. *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 528 с.
255. *Штофф В.А.* Гносеологические функции модели // Вопр. философии. 1961. № 12. С. 53–65.
256. *Штофф В.А.* Моделирование и философия. М.–Л., 1966. 301 с.
257. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 240 с.
258. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения: Пер. с англ. М.: Мир, 1971. 1071 с.
259. *Эльконин Д.Б.* Избранные психологические труды Под. ред. В.В. Давыдова, В.П. Зинченко. М.: Педагогика 1989. 554 с.
260. *Эрдниев Б.П.* Тенденции развития математического образования // Сов. педагогика. 1990. № 3. С. 34–37.
261. *Эрдниев П.М.* Укрупнение дидактических единиц как технология обучения. Ч. 1. М.: Просвещение, 1992. 175 с.
262. *Юдин Э.Г.* Системный подход и принцип деятельности. М.: Наука, 1978. 392 с.
263. *Якиманская И.С.* Развивающее обучение. М.: Педагогика, 1979. 144 с.

264. *Якиманская И.С.* Развитие пространственного мышления школьников. М.: Педагогика, 1980. 240 с.
265. *Янушкевич Ф.* Технология обучения в системе высшего образования. М.: Высшая школа, 1986. 135 с.
266. *Яркина Т.Ф.* Концепция целостной школы в современной немецкой педагогике // Советская педагогика. 1992. № 7. С. 110–116.
267. *Birkhoff G.* A note on topological groups // Compositio Math. 1936. P. 427–430.
268. *Doehlemann K.* Geometrische Transformationen. Leipzig: Göschen, 1908, 2. Teil. 328 p.
269. *Fitzpatric P.M.* Surjectivity results for nonlinear mappings from a Banach space to its dual // Math. Ann. 1973. № 137. P. 269–303.
270. *Henon M.* A two-dimensional mapping with a strange attractor. Comm. Math. Phys. 50, 69 (1976).
271. *Hudson H.* Cremona Transformations Plane and Space. Cambridge: Univ. Press, 1927. 514 p.
272. *Ishikawa K., Ogata T., Nagai* // J. Mater. Sci. Lett. 1989. Vol. 8. № 11. P. 1326–1327.
273. *Miller G.A.* Information and memory. Scientific American, 1956. Vol. 195. № 2. P. 125–167.
274. *Mitchell P.D.* Educational Technology // The Encyclopedia of Educational Media Communications and Technology. L., 1978.
275. *Schultz B.* Scientific vizualization transforming numbers into computer pictures // Computer pictures. 1988. № 1. P. 11–16.
276. *Smirnov E.I.* The theory of Hausdorff spectra in the category of locally convex spaces, Functiones et Approximatio, XXIV, 1996. P. 17–33.
277. *Smirnov E.* Hausdorff spectra in functional analysis. Springer, London, 2002. 210 p.

Оглавление

Учебное издание

Богун Виталий Викторович
Осташков Владимир Николаевич
Смирнов Евгений Иванович

НАГЛЯДНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ:
Теория и практика

Учебное пособие

Редактор *И.М. Смирнова*
Компьютерная подготовка оригинал-макета *Т.Л. Трошиной*

Подписано в печать 10.09.2007. Формат 60×84 1/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 30. Тираж 1000 Заказ