

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ярославский государственный педагогический университет
им. К.Д. Ушинского»

Утверждаю
Проректор по учебной работе
А.М. Ермаков
«25» сентября 2018 г.



Программа вступительного экзамена по математике

Программа составлена в соответствии с государственными требованиями к
обязательному минимуму содержания образовательной программы

Программу составила:
к.п.н., доцент кафедры геометрии и
алгебры М.А. Суворова

Программа утверждена
на заседании приемной комиссии
протокол № 12 от 20.09.2018

Ярославль 2018

Пояснительная записка

Программа составлена в соответствии с Федеральным компонентом государственного образовательного стандарта среднего общего образования, государственному стандарту образования и примерной программе по обществознанию.

Исходными документами являются:

- федеральный компонент государственного образовательного стандарта среднего общего образования, утвержденный Приказом Минобрнауки РФ от 05.03.2004г № 1089;
- примерные программы, созданные на основе федерального компонента государственного образовательного стандарта;
- базисный учебный план общеобразовательных учреждений Российской Федерации, утвержденный приказом Минобрнауки РФ №1312 от 09.03.2004

1. Задачи:

- проверка знаний и умений по математике у поступающих;
- проверка сформированности основных методов решения типовых задач школьного курса математики, в том числе включенных в контрольно-измерительные материалы ЕГЭ по математике.

2. Требования к уровню освоения содержания дисциплины

На экзамене по математике поступающий в ЯГПУ должен показать:

- четкое знание математических определений и теорем, предусмотренных программой, умение доказывать эти теоремы;
- умение точно и сжато выражать математическую мысль в устном и письменном изложении, использовать соответствующую символику;
- уверенное владение математическими знаниями и навыками, предусмотренными программой,
- умение применять их при решении задач.

Программа по математике состоит из трех разделов.

Первый из них представляет перечень основных математических понятий и фактов, которые должен знать поступающий (уметь правильно их использовать при решении задач, ссылаться при доказательстве теорем).

Во втором разделе перечислены теоретические факты (свойства функций; зависимости между тригонометрическими функциями; свойства и признаки геометрических фигур, выводы формул и др.), которые надо уметь доказывать.

В третьем разделе перечислены основные математические умения и навыки, которыми должен владеть экзаменуемый.

Раздел 1. Основные математические понятия и факты

1. Натуральные числа. Делимость. Простые и составные числа. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное.

2. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10.
3. Целые, рациональные и действительные числа. Модуль числа, степень, корень, арифметический корень, логарифм. Синус, косинус, тангенс, котангенс числа (угла). Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс числа.
4. Числовые и буквенные выражения, равенства и тождества.
5. Функция, ее область определения и область значений. Возрастание, убывание, периодичность, четность, нечетность. Наибольшее и наименьшее значения функции. График функции.
6. Линейная, квадратичная, степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические
 1. функции.
7. Уравнения, неравенства, системы; Решения (корни) уравнения, неравенства, системы. Равносильность.
8. Арифметическая и геометрическая прогрессии.
9. Прямая на плоскости. Луч, отрезок, ломаная, угол.
10. Треугольник, медиана, биссектриса, высота.
11. Выпуклый многоугольник. Квадрат, прямоугольник, параллелограмм, ромб, трапеция. Правильный многоугольник. Диагональ многоугольника.
12. Окружность и круг. Радиус, хорда, диаметр, касательная, секущая. Дуга окружности и круговой сектор. Центральные и вписанные углы.
13. Прямая и плоскость в пространстве. Двугранный угол.
14. Многогранник. Куб, параллелепипед, призма, пирамида.
15. Цилиндр, конус, шар, сфера.
16. Равенство и подобие фигур. Симметрия.
17. Параллельность и перпендикулярность прямых, плоскостей.
 - Скрещивающиеся прямые.
2. Угол между прямыми, плоскостями, прямой и плоскостью.
18. Касание. Вписанные и описанные фигуры на плоскости и в пространстве. Сечение фигуры плоскостью.
19. Величина угла. Длина отрезка, окружности и дуги окружности. Площадь многоугольника, круга и кругового сектора. Площадь поверхности и объем многогранника, цилиндра, конуса, шара.
20. Координатная прямая. Декартовы координаты на плоскости и в пространстве. Векторы.

Раздел 2. Основные теоретические знания

Алгебра

1. Определение, свойства функции $y = kx + b$ и ее график.
2. Определение, свойства функции $y = \frac{k}{x} + b$ и ее график.
3. Определение, свойства функции $y = ax^2 + bx + c$ и ее график.
4. Вывод формулы корней квадратного уравнения. Теорема о разложении квадратного трехчлена на линейные множители. Теорема Виета.
5. Свойства числовых неравенств.
6. Формулы общего члена и суммы n первых членов арифметической прогрессии.
7. Формулы общего члена и суммы n первых членов геометрической

прогрессии.

8. Свойства степеней с натуральными и целыми показателями. Свойства арифметических корней n -ой степени. Свойства степеней с рациональными показателями.
9. Свойства степенной функции с целым показателем и ее график.
10. Определение, свойства (с доказательствами) показательной функции и ее график.
11. Основное логарифмическое тождество. Логарифмы произведения, степени, частного. Формула перехода к новому основанию.
12. Определение, свойства (с доказательствами) логарифмической функции и ее график.
13. Определение, свойства (с доказательствами) функций $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$ и их графики.
14. Формулы общего решения уравнений вида $\sin x=a$, $\cos x=a$, $\operatorname{tg} x=a$.
15. Формулы приведения.
16. Зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.
17. Формулы сложения. Тригонометрические функции двойного аргумента.

Геометрия

1. Свойства равнобедренного треугольника.
2. Свойства серединного перпендикуляра к отрезку.
3. Признаки параллельности прямых.
4. Сумма углов треугольника. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника.
5. Признаки равенства треугольников.
6. Признаки параллелограмма. Свойства параллелограмма.
7. Свойства касательной к окружности; свойство касательных, проведенных из одной точки к окружности.
8. Теорема о равенстве произведений отрезков двух пересекающихся хорд. Теорема о равенстве квадрата касательной произведению секущей на ее внешнюю часть.
9. Свойство четырехугольника, вписанного в окружность. Свойство четырехугольника, описанного около окружности.
10. Теорема об окружности, вписанной в треугольник. Теорема об окружности, описанной около треугольника.
11. Измерение угла, вписанного в окружность. Теорема об угле, образованном касательной и хордой.
12. Теорема Фалеса. Признаки подобия треугольников.
13. Теорема Пифагора.
14. Выводы формул для вычисления площадей параллелограмма, треугольника, трапеции.
15. Вывод формулы расстояния между двумя точками, заданными своими координатами. Уравнение окружности.
16. Признак параллельности прямой и плоскости.
17. Признак параллельности плоскостей.
18. Теоремы о перпендикулярности прямой и плоскости.
19. Перпендикулярность двух плоскостей.

20. Теоремы о параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.

21. Теорема о трех перпендикулярах.

Раздел 3. Основные умения и навыки

Экзаменующийся должен уметь:

1. Производить арифметические действия над числами, заданными в виде десятичных и обыкновенных дробей, с требуемой точностью округлять данные числа и результаты вычислений.
2. Производить тождественные преобразования многочленов; алгебраических дробей; выражений, содержащих степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические функции.
3. Строить графики линейной, квадратичной, степенной, показательной, логарифмической и тригонометрической функций.
4. Решать уравнения и неравенства первой и второй степени и приводящиеся к ним; решать системы уравнений и неравенств первой и второй степени и приводящиеся к ним. Сюда, в частности, относятся уравнения и неравенства, содержащие степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические функции.
5. Решать уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. Строить графики функций, содержащих знак модуля.
6. Решать задачи на составление уравнений и систем уравнений.
7. Изображать геометрические фигуры на чертеже и производить простейшие построения на плоскости.
8. Использовать геометрические представления при решении алгебраических задач, а методы алгебры и тригонометрии — при решении геометрических задач.
9. Производить на плоскости операции над векторами (сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число) и пользоваться свойствами этих операций.
10. Пользоваться понятием производной при исследовании функции на монотонность, экстремумы и при построении графиков функций.

3. Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

а) основная

1. Алгебра и начала анализа. 10-11кл. Учебники для общеобразовательных учреждений под редакцией:

а) А.Н. Колмогорова

б) А.Г. Мордковича

с) С.М. Никольского.

2. Геометрия 7-9, Геометрия 10-11 под ред. Л.С. Атанасяна (учебники для сред. школ) (издания с 2006 г.). – М.: Просвещение.

3. Демонстрационный вариант ЕГЭ текущего учебного года. – <http://www.fipi.ru>

б) дополнительная

1. Учебники по алгебре для основной школы (с 2006 г.)

Учебные комплекты авторов:

а) под ред. Г.В. Дорофеева

б) А. Г. Мордкович

в) Ю.Н. Макарычев и др. (под ред. С.И. Теляковского)

г) под ред. Ш.А. Алимова

2. Епифанова Н.М., Меньшикова Н.А. Подготовка к экзамену по математике (для слушателей подготовительного отделения). – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2010.

(<http://cito-web.yspu.yar.ru/link1/metod/met146/met146.html>)

3. Пособия для подготовки к ЕГЭ по математике, выпущенные Федеральным институтом педагогических измерений (ФИПИ) в текущем учебном году.

4. Банк заданий для подготовки к ЕГЭ по математике, размещенный на сайте Министерства образования РФ

5. Выготский М.Я. Справочник по элементарной математике. издания разных лет. ;

6. Сайт для подготовки к ЕГЭ по математике alexlarin.ru

7. Рабочие тетради по математике серии ЕГЭ 2013, 2014, 2015 под редакцией А.Л. Семенова, И.В. Ященко.

в) программное обеспечение

электронное учебное пособие, разработанное в среде moodle на сайте ЯГПУ.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

<http://www.fipi.ru>

<http://www.mathege.ru>

<http://uztest.ru>

Примеры контрольно-измерительных материалов для контроля знаний

1. Решите уравнение: $\frac{2x^2 - 5x - 7}{x + 1} = 0$

2. Укажите количество корней уравнения: $\frac{x^2 - 8}{x - 2} = \frac{2x}{2 - x}$

3. Найдите сумму корней уравнения: $x^2 - 28x + 27 = 0$

4. Укажите общий корень уравнений: $\left(\frac{2x - 5}{x + 3}\right)^2 - 1 = 0$ и $x^2 - 5x - 24 = 0$

5. Решите уравнение: $x^3 + 2x^2 - 18x - 36 = 0$

6. Решите уравнение: $(x^2 + 2) \cdot (x^2 - 8) = 11$

7. Решите уравнение: $\frac{x-2}{x+3} - \frac{30}{x^2-9} = 3$
8. При каком значении параметра a уравнение $x^2 - 4x + a = 0$ имеет один корень?
9. Решите уравнение: $x - 17\sqrt{x} - 18 = 0$
10. Докажите, что уравнение $(x^2 - 2x + 7) \cdot (x^2 + 6x + 11) = 11$ не имеет корней.
11. Решить уравнения:
- 1) $|4x - 1| - |2x - 3| + |x - 2| = 0$
 - 2) $\frac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 + |x - 5|} = 1$
12. Решить неравенства:
- 1) $x^4 - 9x^2 \geq 0$
 - 2) $|x - 6| > |x^2 - 5x + 9|$
13. Указать количество целых решений неравенства: $(2x - 1)^2 - 3(2x - 1) < 0$
14. Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x^2 + y^2 = 16 + 2xy \end{cases}$$
15. Построить графики функций:
- 1) $y = |x + 4|$
 - 2) $y = x^2 - 6x + 5$
16. Постройте графики функций $y = \frac{6}{x}$ и $y = 2x - 4$ и укажите координаты точек пересечения графиков.
17. Постройте график функции
$$f(x) = \begin{cases} 6, & x < -2 \\ x^2 + 2, & -2 \leq x \leq 2 \\ 8 - x, & x > 2 \end{cases}$$
18. Упростите $\frac{\sqrt{5} - 4}{\sqrt{5} + 2} + 6\sqrt{5}$
19. Вычислите $\left(\frac{14}{\sqrt{3} - 1} - 6\sqrt{3}\right) \cdot (\sqrt{3} - 7)$
20. Найти значение выражения: $2 - \operatorname{ctg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg} \alpha - 2 = 0$ и $-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$
21. Найти сумму целых значений функции $y = 5 - 2\sin^4 2x$
22. Найти значение выражения: $\left(\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{2}{3}\right)\right)^{-2}$
23. Решить уравнение $\sqrt{3} - 2\cos \frac{x}{3} = 0$, в ответе указать номер правильного решения:
- 1) $\pm \frac{5\pi}{2} + 3\pi n, n \in Z$
 - 2) $\pm \frac{\pi}{2} + 6\pi n, n \in Z$
 - 3) $\pm \frac{5\pi}{2} + 6\pi n, n \in Z$
 - 4) $\pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$
24. Найти количество корней уравнения: $(\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot \sqrt{1 - x^2} = 0$

25. Решить уравнение: $\sqrt{16 - (5x + 2)^2} = 4 + \cos^2 \frac{15\pi x}{4}$
26. Найти сумму всех корней уравнения $\cos 3x \cos 4x - \cos 7x = 2 \sin 4x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{2\pi}{3}\right)$
27. Решить уравнение $4\operatorname{tg}x + 3|\operatorname{tg}x| = \sin 2x$
28. Решить неравенство $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$
29. Найти корень и сумму корней (если их несколько) уравнения:
 $(0,04)^{(x-1)(4-2x)-6} = 125^{x^2}$
30. Найти корень или произведение корней (если их несколько) уравнения:
 $\log_4(x^2 - 7x + 49) = \log_2(2x - 7)$
31. Решить уравнение $2^{2x^2} - 17 \cdot 2^{x^2-x+2} + 2^{8-2x} = 0$
32. Решить систему неравенств $\begin{cases} 2^x < 16 \\ \log_{0,5} x < -1 \end{cases}$ и указать номер верного ответа
- 1) $(-\infty; 4)$
 - 2) $(0; 4)$
 - 3) $(2; 4)$
 - 4) $(-\infty; 2)$
33. Решить неравенство $5^{2+x} > 2 - 3x$
34. Решить неравенство $\sqrt{\log_2 x - 3} \geq 5 - \log_2 x$
35. Найдите производную функции $y(x) = 5e^x - x^3$ и указать номер правильного ответа
- 1) $y'(x) = e^x - 3x^2$
 - 2) $y'(x) = 5e^x - \frac{x^4}{4}$
 - 3) $y'(x) = 5e^x - 3x^2$
 - 4) $y'(x) = 5e^x + 1$
36. Точка движется по прямой по закону $s(t) = 7 - 8t + t^4$. Найти её скорость в момент времени $t=3$ и указать номер правильного ответа:
- 1) 107
 - 2) 5
 - 3) 19
 - 4) 100
37. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x) = 9 - 5x - 7x^2 + x^4$ в его точке с абсциссой $x_0 = -1$
38. Найти сумму наибольшего и наименьшего значений функции $y = 3^{x^3 - 3x^2 - 9x}$ на отрезке $[1, 5; 0]$.
39. При каком значении a функция $y = \frac{3^{ax-3}}{2x^3 - 5x^2}$ имеет минимум в точке $x = -1$
40. Производная функции $f(x)$ имеет вид $f'(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$. Найти точку максимума этой функции или их сумму, если точек максимума несколько.
41. Вокруг прямоугольного поля площадью 400 га надо посадить со всех сторон деревья в форме полосы шириной 10 м. Каковы должны быть линейные размеры поля, чтобы площадь, занимаемая деревьями, была наименьшей?

42. Двое рабочих совместно могут выполнить плановое задание за 12 дней. Если половину задания будет выполнять один рабочий, а затем вторую половину – другой, то все задание будет выполнено за 25 дней. За сколько дней может выполнить задание каждый рабочий?
43. Из пунктов А и В, расположенных на расстоянии 50 км, одновременно навстречу друг другу вышли два пешехода. Через 5 часов они встретились. После встречи пешеход, идущий из А в В, уменьшил скорость на 1 км/ч, а второй увеличил скорость на 1 км/ч. Первый пешеход прибыл в В на 2 часа раньше, чем второй в А. Найдите первоначальную скорость каждого пешехода.
44. После встречи двух теплоходов один из них пошел на юг, а другой – на запад. Через 2 часа после встречи расстояние между ними было 60 км. Найдите скорость каждого теплохода, если известно, что скорость одного из них на 6 км/ч больше скорости другого.
45. К раствору, содержащему 40г соли, добавили 200г воды, после чего массовая доля растворенной соли уменьшилась на 10%. Сколько воды содержал раствор и какова была в нем массовая доля соли?
46. Сбербанк в конце года начисляет 4% годовых от суммы, находящейся на счету в начале года. Каким станет первоначальный вклад в 2500 рублей через год?
- 1) 2504 р.
 - 2) 2550 р.
 - 3) 2580 р.
 - 4) 2600 р.
47. Скорость движения велосипедиста от поселка до станции была на 1 км/ч больше, чем на обратном пути. На обратный путь он затратил на 2 минуты больше. Расстояние между пунктами 7 км. Найдите первоначальную скорость велосипедиста.
- Пусть x км/ч – скорость велосипедиста от поселка до станции. Какое уравнение соответствует условию задачи?
- 1) $\frac{7}{x+1} - \frac{7}{x} = \frac{1}{30}$
 - 2) $\frac{7}{x-1} - \frac{7}{x} = \frac{1}{30}$
 - 3) $\frac{7}{x-1} + \frac{7}{x} = 2$
 - 4) $\frac{7}{x + \frac{1}{30}} - \frac{7}{x} = 1$.
48. В сплав олова, свинца и меди, содержащий 42% олова, добавили 800г свинца, 500г меди и получили сплав, в котором массы олова, свинца и меди оказались равными. Сколько меди было в первоначальном сплаве.
49. Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 15 ч. Через 5 ч. после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий. и работу над заказом они довели до конца уже вместе. За сколько часов был выполнен весь заказ.
50. Сумма второго, восьмого и одиннадцатого членов арифметической прогрессии равна 69. Найдите седьмой член этой прогрессии.
51. Моторная лодка прошла 16 км по течению реки и вернулась обратно, затратив на весь путь 3 часа. В другой раз эта лодка за 2 часа прошла 8 км по течению реки и 12 км против течения. Найдите собственную скорость моторной лодки и скорость течения реки.
52. Катеты прямоугольного треугольника равны 5 и 12. Найти длину биссектрисы прямого угла.
53. Дана равнобедренная трапеция с основаниями 20 и 12. Центр описанной около трапеции окружности лежит на большем основании. Найти длины боковой стороны и диагонали трапеции.

54. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее меньшее основание равно 18 см, высота 9 см, острый угол 45° .
55. В четырехугольнике ABCD длина стороны $AB=12$; $\sin \angle BAC = 0,33$; $\sin \angle ADB = 0,44$; $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$. Найдите длину стороны BC.
56. Найдите площадь полной поверхности правильного тетраэдра со стороной $4\sqrt{3}$.
57. Боковое ребро правильной четырехугольной призмы на 12,5% меньше стороны ее основания. Расстояние между серединами двух непараллельных ребер, принадлежащих разным основаниям, равно 9. Найдите площадь боковой поверхности призмы.
58. Высота правильной треугольной призмы равна $10\sqrt{3}$. Секущая плоскость проходит через среднюю линию нижнего основания и параллельную ей сторону верхнего основания и составляет с плоскостью нижнего основания двугранный угол величиной 60° . Найдите площадь сечения призмы данной плоскостью.
59. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды с апофемой, равной $\sqrt{10}$, если ее боковое ребро составляет угол 30° с плоскостью основания.
60. На областные соревнования приехали 5 спортсменов из Переславля, 7 из Рыбинска и 3 из Тутаева. Порядок выступлений определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что двенадцатым будет выступать спортсмен из Тутаева.
61. В сборнике билетов по математике всего 25 билетов, в 9 из них встречается вопрос о свойствах логарифмов. Какова вероятность того, что в случайно выбранном билете на экзамене ученику достанется вопрос о свойствах логарифмов?

Письменная работа по математике

Вступительное испытание по математике проводится в форме письменной контрольной работы. Каждый вариант работы содержит восемь задач, содержание которых проверяет уровень усвоения школьниками знаний и умений, определенных в государственном стандарте образования по математике. От абитуриентов требуется решить задачу, записать решение с обоснованием шагов, при необходимости выполнить чертеж. Две задачи по 5 баллов, 2 задачи по 10 баллов, 2 задачи по 15 баллов и 2 задачи по 20 баллов. Таким образом, максимальное количество баллов в каждом варианте составляет 100 баллов.

Критерии оценивания работ

Задачи на 5 баллов:

«5 баллов» ставится, если:

- Задача решена полностью;
- в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;
- в решении нет математических ошибок.

«4 балла» ставится, если:

- Задача выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);
- допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки).

«3 балла» ставится, если:

- допущены более одной ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но учащийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме.

«2 балла» ставится, если:

- допущены существенные ошибки

«1 балл» ставится, если:

работа показала полное отсутствие у обязательных знаний и умений по проверяемой теме или значительная часть работы выполнена не самостоятельно.

Задачи на 10, 15 баллов (для каждой из подзадач оценивание производится по 5-бальной шкале):

«5 баллов» ставится, если:

- Задача решена полностью;
- в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;
- в решении нет математических ошибок.

«4 балла» ставится, если:

- Задача выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);
- допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки).

«3 балла» ставится, если:

- допущены более одной ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но учащийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме.

«2 балла» ставится, если:

- допущены существенные ошибки

«1 балл» ставится, если:

работа показала полное отсутствие у обязательных знаний и умений по проверяемой теме или значительная часть работы выполнена не самостоятельно.

Задачи на 20 баллов (для каждой из подзадач оценивание производится по 5-бальной шкале):